

Geschichte.

● **Reidemeister, Kurt: Das System des Aristoteles. (Hamburg. math. Einzelschriften. H. 37.)** Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1943. 20 S. RM. 2.—.

Die Metaphysik des Aristoteles ist deshalb so schwer verständlich, weil wir in ihre Entstehung keinen Einblick haben. Seine frühen Schriften sind verloren und nur in zitierten Bruchstücken auf uns gekommen. Auch die sogenannten ungeschriebenen Lehren Platons, die Aristoteles in der Metaphysik bekämpft, sind uns nicht näher bekannt. In der vorliegenden Studie, die Constantin Carathéodory zugeeignet ist, will der Verf. einen Zugang zum System der Aristoteles bahnen; dabei wird zugleich der Versuch gemacht, die Rolle der Mathematik in diesem System aufzuhellen. — Eine textkritische Betrachtung der Metaphysik, die sich auf W. Jaegers Untersuchungen stützt und teils auf sprachlicher Analyse, teils auf inhaltlicher Bewertung beruht, kommt zu dem Ergebnis, daß in der uns bekannten Gestalt des Werkes zwei Fassungen durcheinandergehen. Auf dem Weg von der ersten zur zweiten Fassung wird die „Entplatonisierung“ des Aristoteles greifbar. Die Urfassung begann und endete mit einer Kritik des Platonismus. Aber die eigene Lehre, die an dessen Stelle treten sollte, blieb uneinheitlich; denn die Metaphysik wird einerseits als allgemeine Ontologie, andererseits als Lehre vom höchsten Seienden, als Theologie, aufgefaßt. Dabei ist zu beachten, daß die Metaphysik auf der Physik fußt, die für Aristoteles eine Ontologie des Wirklichen ist. So ergibt sich die Notwendigkeit, zuvor den Gehalt der Physik des Aristoteles und ihre Beziehung zur Platonischen Physik zu klären. Erst dann läßt sich ein Bild von seiner Metaphysik und von den Beziehungen des Aristotelischen und des Platonischen Systems gewinnen. — Nach einigen logischen und erkenntnistheoretischen Betrachtungen, in denen u. a. festgestellt wird, daß es nicht Aufgabe der Metaphysik ist, die Prinzipien der Physik a priori abzuleiten, legt der Verf. den tiefen Gegensatz zwischen den physikalischen Anschauungen des Aristoteles und Platons Timäus dar. Die Physik ist für Aristoteles eine Theorie der Natur, deren Prinzip Veränderung ist, während nach Plato nur das Unveränderliche erkennbar ist. Im einzelnen werden die Vorstellungen des Aristoteles von Ort, Zeit und Stetigkeit herausgearbeitet und sein Versuch einer Auflösung der Paradoxien des Zeno mit Hilfe seiner geistreichen Unterscheidung zwischen möglicher und wirklicher Existenz von Punkten und Augenblicken erläutert. Das führt zu der Stellung der Mathematik in der Aristotelischen Philosophie. Die Mathematik betrachtet nach ihm die räumlichen Eigenschaften nur der Möglichkeit nach; ihre Sätze vermitteln nicht die Einsicht ins Wirkliche, sondern nur in die mögliche Gestalt wirklicher Dinge. Diese Aristotelische Auffassung von der Mathematik wird in eindrucksvollen Sätzen und Beispielen der Auffassung Platons gegenübergestellt, für den die mathematischen Gegenstände begriffliche Abbilder idealer Urbilder sind. Die Stellung, die die Mathematik im System des Aristoteles und in der Ideenlehre Platons einnimmt, und die Bedeutung für die Wirklichkeit, die ihr in beiden zugeschrieben wird, macht den Unterschied der beiden Philosophen deutlich. — So ergibt sich zum Schluß die Erkenntnis, daß die Physik des Aristoteles nicht nur ein wissenschaftlich durchgeführter Timäus, sondern ein System ist, das die Ideenlehre ersetzen will, und daß uns in der Metaphysik der Versuch einer abgekürzten Widerlegung der Ideenlehre erhalten ist. Wie die Akademie sich gegen diese Lehren des Aristoteles verteidigt hat, wissen wir nicht; wir können es nur ahnen.

E. Löffler (Brüssel).

Andrissi, G. L.: Una nuova interpretazione di alcuni brani di Platone che esclude in Platone ogni ipotesi sulla reale rotazione diurna della terra. (*Bologna, 4.—6. IV. 1940.*) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 912—920 (1942).

Die von G. Schiaparelli (Scritti sulla Storia dell'Astronomia antica I, 1 und 2, Bologna 1925/26) und P. Duhem (Le système du monde I, II, Paris 1913/17) angezogenen Stellen, aus denen hervorgehen soll, daß Platon die tägliche Erddrehung gelehrt habe, sind nach Verf. nicht beweiskräftig; sie könnten vielmehr auch in Beziehung zu einem der (in ihren Einzelheiten nicht näher bekannten) früheren geozentrischen Systeme stehen, wie dem des Anaxagoras. *Jos. E. Hofmann.*

Andrissi, G. L.: Una nuova interpretazione del sistema di Filolao, più consona ai testi e che giustifica i dieci corpi mobili, e che mostra come in tale sistema la rotazione diurna degli astri dovesse considerarsi reale. (*Bologna, 4.—6. IV. 1940.*) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 903—907 (1942).

Bei dem Versuch, das Weltsystem des Philolaos aus den erhaltenen Fragmenten wiederherzustellen, macht man gewöhnlich die folgenden Annahmen (G. Schiaparelli, I Precursori di Copernico nell'Antichità, Mailand 1873 = Scritti sulla Storia dell'Astronomia antica I, 1, Bologna 1925): Um das feste Zentralfeuer kreisen in der Äquatorebene die Erde (bewohnter Teil stets vom Zentralfeuer abgewandt) und die Gegenerde, in der Ekliptik die Sonne, der Mond und die 5 großen Planeten. Schließlich wird auch die Fixsternsphäre in einer nicht ganz sicher feststellbaren Weise mitbewegt. Verf. nimmt vor allem an der bei der bisherigen Auffassung unvermeidlichen täglichen Parallaxe Anstoß und will sie dadurch beseitigen, daß er die Erde und Gegenerde nicht mehr im Äquator, sondern parallel zur Ekliptik bewegt denkt und sämtlichen 10 Sphären eine Gegenbewegung um die Äquatorachse zuteilt. Sein Wiederherstellungsversuch ist unbefriedigend, zumal die tägliche Parallaxe auch bei dieser Deutung bestehen bleibt.

Jos. E. Hofmann (Berlin).

Zinner, Ernst: Entstehung und Ausbreitung der Copernicanischen Lehre. S.-B. physik.-med. Soz. Erlangen 74, 1—594 (1943).

Verf. gibt auf Grund sorgfältiger und eingehender Literaturstudien — das beigegebene Schriftenverzeichnis bezieht sich auf mehr als 800 zum Teil sehr umfangreiche Veröffentlichungen — einen trefflichen Überblick über die Vorgeschichte und das Werden der modernen astronomischen Grundgedanken. Besonders hervorgehoben wird der Anteil der Deutschen im lateinischen Mittelalter (Wilhelm v. Hirsau, Heinrich v. Langenstein) und zur Zeit der Humanisten (Peurbach, Regiomontan). Nun folgt eine eingehende Darstellung von Leben und Wirken des Copernicus unter Ausschöpfung des gesamten neueren und neuesten Schrifttums zu den einschlägigen Problemen sowie eine gründliche Studie über Brahe und Kepler. Das sehr interessante kritische Urteil des Verf. über Galilei ist eigenartig, aber wohlbegründet. Die Weiterentwicklung der astronomischen Lehren im 17. und 18. Jahrhundert wird nur mehr gestreift; hier bleibt manches Wünschenswerte unberücksichtigt, wie etwa die höchst interessante Stellungnahme Leibnizens (nicht Leibnitz!) zur Astronomie seiner Zeit und die Beiträge der weniger bekannten französischen Mathematiker und Astronomen in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts, wie Petau, Mouton usw. Von den 8 Anhängen verdienen besondere Erwähnung die bibliographisch wichtigen Angaben über die ehemalige Bibliothek des Saxonius und die Jesuitenbriefe zwischen 1600 und 1660 (nur in Auswahl berücksichtigt) sowie über die Bildnisse des Copernicus. — Das wertvolle Buch ist mit zahlreichen Tafeln, Bildnissen und Abbildungen versehen und vorzüglich ausgestattet. *Jos. E. Hofmann.*

Veen, S. C. van: Historische Besonderheiten über $\int_0^x e^{-x^2} dx$. Mathematica, Zutphen B 12, 1—4 (1943) [Holländisch].

Verf. wendet sich gegen die übliche Bezeichnung des obigen Integrals als Gaußsches Fehlerintegral. Einige Autoren benennen das Integral nach Poisson, während

weitere die Urheberschaft Laplace oder sogar Euler zuschreiben. Verf. erwähnt, daß Gauß das Integral öfters verwendet hat, besonders bei seiner Methode der kleinsten Quadrate. Gauß selber hat in seiner klassischen Arbeit „*Theoria motus corporum coelestium*“ das Integral nach Laplace benannt, während er später angab, daß man dasselbe auch aus einem Eulerschen Ergebnis erhalten könne. Laplace hat tatsächlich bereits 1805 das Integral angegeben. Aus einem Eulerschen Ergebnis des Jahres 1794 läßt sich das Integral unschwer ableiten. Es erscheint dem Verf. unwahrscheinlich, daß Poisson bereits vor 1805 das Integral gefunden haben sollte. Die Benennung nach Euler erscheint demnach als die richtigste. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Fry, Thornton C.: Industrial mathematics. Bell. Syst. techn. J. **20**, 255—292 (1941).

Im vorliegenden Bericht gibt Verf. einen Überblick über die Verwendung der Mathematik in einzelnen Industriezweigen. Insbesondere werden auch Angaben gemacht über die Zahl der in Amerika in industriellen Unternehmungen beschäftigten Mathematiker. *Wegner* (Heidelberg).

Thalberg, Olaf M.: 25 Jahre Norwegische Mathematische Vereinigung. Norsk mat. Tidsskr. **25**, 65—75 (1943) [Norwegisch].

Cartan, Élie: Notice nécrologique sur Georges Giraud. C. R. Acad. Sci., Paris **216**, 516—518 (1943).

Whittaker, E. T.: Edward Lindsay Ince 1891—1941. J. Lond. Math. Soc. **16**, 139—144 (1941).

Biographie, wissenschaftliche Würdigung, Schriftenverzeichnis. *Harald Geppert*.

Chaundy, T.: E. G. C. Poole. J. Lond. Math. Soc. **16**, 125—130 (1941).

Wissenschaftliche Biographie u. Schriftenverzeichnis. *Harald Geppert* (Berlin).

Whittaker, E. T.: Vito Volterra 1860—1940. J. Lond. Math. Soc. **16**, 131—139 (1941).

Biographie u. wissenschaftliche Würdigung. *Harald Geppert* (Berlin).

Turnbull, H. W.: Alfred Young 1873—1940. J. Lond. Math. Soc. **16**, 194—208 (1941).

Biographie, wissenschaftliche Würdigung, Schriftenverzeichnis. *Harald Geppert*.

Philosophie.

Lettenmeyer, Fritz: Das Experiment in der Mathematik. Z. ges. Naturwiss. **9**, 63—87 (1943).

Obwohl man bei der Beurteilung von Wesen und Wert der Mathematik in erster Linie ihre logische Strenge und ihren deduktiven Charakter betont, kommt es beim Finden mathematischer Wahrheiten nicht allein auf Logik an. Hier bedarf es meist einer planmäßig angelegten Reihe systematischer Versuche, eines mathematischen Experimentierens. Um klarzumachen, wie die Mathematiker ihre Sätze finden, und wie sich der Fortschritt in der Mathematik vollzieht, erörtert der Verf. das mathematische Experiment an einer Reihe von Einzelproblemen, für die er historische Belege gibt. Dabei zeigt er, daß die Methode des mathematischen Experiments häufig über die reine Mathematik hinaus von Bedeutung ist. Als Beispiele behandelt er zunächst ausführlich die Auffindung der Planetengesetze durch Kepler, der in seinen Werken selbst genauen Einblick in die Art seines Forschens gibt und alle Um- und Irrwege seines Probierens schildert. Dann folgen Beispiele aus der vorwissenschaftlichen Periode der Mathematik und aus ihren Blütezeiten bei den Griechen (Methodenlehre des Archimedes) und im 17. Jahrhundert. Die Entwicklung der Zahlentheorie bietet viele Zeugnisse des numerischen Experimentierens; die Theorie der Primzahlen hat sich, wie an einem kurzen Abriß ihrer Geschichte gezeigt wird, aus ihm entwickelt und kann es nicht entbehren. Das Dreikörperproblem ist in neuerer Zeit unter Leitung von E. Strömberg durch planmäßig organisierte mathematische Experimente und

numerische Integrationen unter Einsatz zahlreicher Mitarbeiter neu in Angriff genommen und gefördert worden. — Obwohl die Forschungsmethode des numerischen Experimentierens in der modernen Mathematik aus verschiedenen Gründen stark zurückgetreten ist, glaubt Verf., daß sie, namentlich in der Zahlentheorie, auch in Zukunft Erfolg haben wird, wenn man sie intensiviert und wenn man, ähnlich wie in der naturwissenschaftlichen Forschung, den Gedanken der „Mannschaftsarbeit“ verwirklicht. — Daß das mathematische Experimentieren nur zu Vermutungen führen kann und die vermuteten Sätze erst dann zur gesicherten Erkenntnis werden, wenn man sie streng bewiesen hat, ist klar. Nicht selten weist das Experimentieren aber auch den Weg zum deduktiven Beweis. So ist das mathematische Experiment ein wesentlicher Teil der geistigen Tätigkeit, die zum Erfinden mathematischer Sätze führt. Das Entstehen des schöpferischen Gedankens, der noch hinzukommen muß, läßt sich nicht greifbar aufzeigen oder gar lehren; er ist eine neuer, meist unerwartet aus der Tiefe des Genies steigender Einfall.

E. Löffler (Brüssel).

Algebra und Zahlentheorie.

Allgemeines. Kombinatorik:

● Schubert, Hermann: *Mathematische Mußestunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur.* Neubearb. v. F. Fitting. 10., verm. Aufl. Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1943, 271 S. geb. RM. 4.80.

Welcher Beliebtheit sich das 1897 zuerst erschienene Buch erfreut, zeigt die erstaunliche Tatsache, daß im fünften Kriegsjahr die zehnte Auflage möglich geworden ist. Auch wer das große Werk von W. Ahrens, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*, kennt, wird in den „Mathematischen Mußestunden“ noch mancherlei Ergänzungen und Neuigkeiten finden. Das gilt insbesondere von den Änderungen und Zusätzen, welche die 10. Auflage bringt. So wird im Abschnitt E des § 19 gezeigt, wie man durch dyadische Darstellung der Zahlen das Dürersche Quadrat in 4 Komponenten zerlegen kann und durch verschiedene Zusammensetzung und Umkehrung dieser neue magische Quadrate gewinnen kann. Bei dem Quadrat mit 81 Feldern gelingt durch Benutzung triadischer Zahlen die Zerlegung in 4 Komponenten, die panmagisch sind. Durch Permutation und Abänderung dieser kommt man im ganzen zu $6^4 \cdot 24$ panmagischen Quadraten. (Für eingehendere Studien sei auf das Buch des Herausgebers: *Panmagische Quadrate und magische Sternvielecke*, Leipzig 1939; dies. Zbl. 20, 107 hingewiesen.) — Der Abschnitt F des § 25 bringt für das Brett von 36 Feldern ein Verfahren zur Gewinnung aller möglichen Rösselsprünge. Ähnlich der Methode Collinis wird im Anschluß an Moon das Brett zerlegt in einen Rand von 32 Feldern und ein inneres Quadrat. Die 4 Ketten des Randes werden geöffnet und mit den Innenfeldern verbunden. Besondere, etwas schwierigere Untersuchungen sind erforderlich, um 16 bei den 4 Ketten nicht benutzte Springerzüge einzuschalten. Doch erläutern übersichtliche Figuren das Verfahren.

Walter Naumann.

Lineare Algebra. Polynome:

Jacobsthal, Ernst: *Zur Hauptachsentransformation einer positiv definiten quadratischen Form.* Norsk Vid. Selsk., Forh. 13, 119—122 (1941).

Es wird zu einer reellen, positiv definiten quadratischen Form $\sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k$ ($a_{ik} = a_{ki}$) explizit eine reelle nichtsinguläre Variabelntransformation $x_i = \sum_{k=1}^n b_{ik} u_k$ ($i = 1, \dots, n$) angegeben, derart daß $\sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k = \sum_{i=1}^n u_i^2$ wird. Dabei ist $b_{ik} = 0$ für $i < k$, die Transformation $x_i = \sum_{k=1}^n b_{ik} u_k$ ist also i. a. nicht orthogonal.

Krull (Bonn).

Stöhr, Alfred: Oszillationstheoreme für die Eigenvektoren spezieller Matrizen. J. reine angew. Math. 185, 129—143 (1943).

Verf. betrachtet symmetrische Matrizen der Form

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} g_1(\lambda) & k_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k_1 & g_2(\lambda) & k_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{n-1} & g_n(\lambda) \end{pmatrix},$$

die in der Hauptdiagonale monotone reelle Funktionen eines reellen Parameters λ und in den beiden benachbarten Parallelen positive Konstanten k_ν enthalten. Die Lösungen von $|M(\lambda)| = 0$ heißen die Eigenwerte, die Lösungen des mit einem Vektor u gebildeten linearen homogenen Gleichungssystems $M(\lambda)u = 0$ die Eigenvektoren von $M(\lambda)$; sie werden, wie üblich, als Spalte geschrieben. Gegenstand der Untersuchung sind die Vorzeichen der Koordinaten der Eigenvektoren. Es gibt genau n reelle Eigenwerte, und diese sind paarweise voneinander verschieden. Ordnet man sie nach wachsender Größe, wodurch auch die Eigenvektoren eine bestimmte Reihenfolge erhalten, so besitzt die Folge der Koordinaten des ν -ten Eigenvektors ($\nu = 1, 2, \dots, n$) genau $\nu - 1$ Zeichenwechsel (erstes Oszillationstheorem.) Durch geeignete Wahl der Eigenvektoren (die nur bis auf einen skalaren Faktor bestimmt sind) kann man erreichen, daß auch in der ν -ten Zeile der aus ihnen gebildeten Matrix genau $\nu - 1$ Zeichenwechsel vorkommen (zweites Oszillationstheorem). Fragestellung und Beweisgang weisen eine Analogie zu Problemen der Sturm-Liouvilleschen Randwertaufgaben bei linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf, die auch durch die Bezeichnung der Sätze als Oszillationstheoreme zum Ausdruck kommen soll. Die Voraussetzung $k_\nu > 0$ ($\nu = 1, 2, \dots, n - 1$) ist unwesentlich. Der Fall, daß nicht alle k_ν positiv sind, läßt sich auf den Fall positiver k_ν zurückführen. Es genügt sogar, sich auf den Fall $k_\nu = 1$ ($\nu = 1, 2, \dots, n - 1$) zu beschränken. Rohrbach (Prag).

Petterson, Erik L.: Eine Darstellung irreduzibler Polynome der imaginärquadratischen Zahlkörper. Ark. Mat. Astron. Fys. 29 A, Nr 15, 1—11 (1943).

Von den Ergebnissen der Arbeit sind vor allem Satz 1, der Ausgangspunkt der Untersuchung, sowie Satz 4, der eigentliche Hauptsatz, hervorzuheben. Satz 1: Ein Polynom $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ mit ganzzahligen Koeffizienten a_i aus einem imaginärquadratischen Zahlkörper K ist dann und nur dann über K irreduzibel, wenn in K ein ganzzahliges Polynom $g(x)$ existiert, derart daß für $n - 1$ Wurzeln ξ von $f(x)$ durchweg $|g(\xi)| < 1$ wird. — Satz 4: Bei den gleichen Bezeichnungen wie in Satz 1 ist $f(x)$ dann und nur dann über K irreduzibel, wenn in K unendlich viele ganzzahlige Zerlegungen $f(x) = h(x) + g(x)$ existieren, bei denen $g(x)$ den Grad $n - 1$ besitzt und für $|g(x)| = 1$ stets $|h(x)| < 1$ wird. — Der Beweis, daß die in Satz 1 und Satz 4 angegebenen Irreduzibilitätskriterien hinreichend sind, (und zwar auch dann, wenn K nicht imaginär-quadratisch, sondern der Körper der rationalen Zahlen ist), macht verhältnismäßig wenig Schwierigkeiten. Bei Satz 1 handelt es sich letzten Endes um den gleichen Schluß, mit dem man im speziellen zeigt, daß $f(x)$ sicher über K irreduzibel ist, wenn $n - 1$ Wurzeln ξ absolut genommen zwischen 0 und 1 (ausschließlich) liegen. Bei Satz 4 kommt man rasch zum Ziel, wenn man den Rouchéschen Satz der Funktionentheorie heranzieht und sich im übrigen auf Satz 1 stützt. — Wesentlich schwieriger gestaltet sich dagegen, zum mindesten beim Hauptsatz 4, der Nachweis, daß die angegebene Irreduzibilitätsbedingung notwendig ist. Hier stützt sich Verf. auf den folgenden, an sich bemerkenswerten Hilfssatz: Sind η_1, \dots, η_k beliebige reelle oder komplexe Zahlen, so gibt es in dem imaginär quadratischen Zahlkörper K unendlich viele ganzzahlige Polynome $g_i(x) = a_{i0}x^k + a_{i1}x^{k-1} + \cdots + a_{ik}$ ($i = 1, 2, \dots$) mit rationalem a_{i0} , derart, daß $\lim_{i \rightarrow \infty} |g_i(\eta_\mu)| = 0$ ($\mu = 1, \dots, k$); $\lim_{i \rightarrow \infty} a_{i0} = +\infty$. — Der Hilfssatz seinerseits folgt leicht aus der Tatsache, daß zu k reellen Zahlen $\vartheta_1, \dots, \vartheta_k$ bei beliebig klein vorgegebenem ε stets rationale Zahlen A, B_1, \dots, B_k so bestimmt werden können.

daß $|A - B_\mu \cdot \vartheta_\mu| < \varepsilon$ ($\mu = 1, \dots, k$). Im übrigen erfordert auch nach Gewinnung des Hilfssatzes der Abschluß des Notwendigkeitsbeweises von Satz 4 noch eine ziemlich mühsame Rechnung, auf deren Einzelheiten wir hier nicht näher eingehen können. Hervorgehoben sei nur, daß diesmal wesentlich von der Voraussetzung Gebrauch gemacht werden muß, daß wir es mit einem echten imaginär-quadratischen Zahlkörper, und nicht etwa mit dem Körper der rationalen Zahlen zu tun haben. Krull (Bonn).

Littlewood, J. E.: *Mathematical notes*. 14. „Every polynomial has a root.“ J. Lond. Math. Soc. 16, 95—98 (1941).

Ein allbekannter Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra geht davon aus, daß $|f(z)|$ seine untere Grenze in z_0 wirklich erreicht. Setzt man dann, falls die untere Grenze $\neq 0$ sein sollte, $f(z_0 + \zeta) = A_0 + A_m \zeta^m + \dots \zeta^n$, so bestimmt man ζ so, daß $|f(z_0 + \zeta)| < |A_0|$ ausfällt. Dazu muß man aber die reine Gleichung $A_0 + A_m z^m = 0$ lösen, also von trigonometrischen Funktionen Gebrauch machen. Hier wird nun eine Beweisanordnung gegeben, die diesen Gebrauch vermeidet. Der Gedanke ist die nochmalige Anwendung des Minimumprinzips auf die reine Gleichung.

van der Waerden (Leipzig).

Sz. Nagy, Gyula v.: *Relationen zwischen den Nullstellen und A-Stellen der Polynome und ihre Anwendung auf die Untersuchung der Lage der Wurzeln von algebraischen Gleichungen*. Muzeumi Füzetek 1, H. 1/2, 132—149 u. dtsch. Zusammenfassung 149—152 (1943) [Ungarisch].

Um die Nullstellen des Polynomes $f(z) = \prod_{v=1}^n (z - z_v)$ seien die Kreise $K_v : |z - z_v| = \rho_v$ gezeichnet; erfüllen dann die ρ_v die Gleichung $(1) \prod_{v=1}^n \rho_v = |A|$, so liegen in dem Außengebiet aller K_v ($v = 1, \dots, n$) wie im Durchschnitt dieser Kreise keine A -Stellen von $f(z)$; in $M = \sum_{v=1}^n K_v$ liegen alle B -Stellen von $f(z)$ mit $(2) |B| \leq |A|$; ist $\sum_{v=1}^p K_v$ punktfremd zu $K_{p+1} \dots K_n$, so liegen darin genau p B -Stellen für jedes B , das (2) erfüllt. Vertauscht man die ρ_v in (1) oder nimmt man einen andern Lösungssatz von (1), so erhält man andere Mengen M ; deren gemeinsamer Durchschnitt M^* enthält wieder alle A - und B -Stellen; zerfällt er in mehrere Teile, so liegen in jedem derselben ebensoviel A - wie B - wie Nullstellen. Läßt man bei der Herstellung von M^* in jedem M den Durchschnitt aller K_v weg, so entsteht ein Durchschnittsbereich, der zwar alle A -, aber nicht alle B -Stellen mit (2) enthält. Daraus folgen Nullstellensätze für Polynome $(3) f(z) = z^n + \sum_{v=1}^n c_v z^{n-v}$. Liegen z. B. alle Nullstellen in $|z - \zeta| \leq r$, so liegen alle A -Stellen in $|z - \zeta| \leq r + \rho$ mit $(4) \rho^n = |A|$ bzw. für $\rho > r$ im Kreisring $\rho - r \leq |z - \zeta| \leq \rho + r$. Liegen genau p Nullstellen in $|z - \zeta| \leq r_1$, die restlichen $n - p$ aber in $|z - \zeta| \geq r_2 > r_1$ und gilt mit $\rho > 0, s > 1$ $r_2 - r_1 \geq \rho(s + 1)$, so liegen in den Bereichen $|z - \zeta| \leq r_1 + \rho s^{1-n/p}$ bzw. $|z - \zeta| \geq r_2 - \rho s^{1-n/(n-p)}$ genau p bzw. $n - p$ A -Stellen, wenn (4) gilt. Enthält die Menge M alle Nullstellen von $f(z)$ und ist T die Summe aller Kreisscheiben vom Radius ρ und mit Mittelpunkten in M , T' ihr Durchschnitt, so liegen bei Gültigkeit von (4) und (2) in T alle B -Stellen, in $T - T'$ alle A -Stellen. Ähnliche Sätze lassen sich gewinnen, bei denen nicht $|A|$, sondern $\arg A$ eine Rolle spielt. Ist z. B. M ein konvexer, alle Nullstellen von $f(z)$ enthaltender Bereich und M_k der durch seine Parallelverschiebung in Richtung $\frac{1}{n}(2k\pi + \arg A)$ entstehende Streifen, so enthält $\sum_{k=0}^{n-1} M_k$ alle A -Stellen von $f(z)$. Anwendung auf trinomische und quadrimische Gleichungen. Harald Geppert (Berlin).

Sz. Nagy, Gyula v.: *Verallgemeinerung eines Satzes von Jentzsch*. Mh. Math. Phys. 51, 59—62 (1943).

Soient $f(z), g_1(z), g_2(z)$ trois polynomes de degrés respectifs $n, m_1 \leq m < n, m_2 \leq m < n$; on suppose que les zéros des deux polynomes $F_1(z) = f(z) - g_1(z)$,

$F_2(z) = f(z) - g_2(z)$ sont tous dans un cercle K de rayon R . Le théorème de Jentzsch détermine un cercle concentrique à K , dans lequel se trouvent tous les zéros d'une combinaison linéaire $\lambda_1 F_1(z) + \lambda_2 F_2(z)$, en fonction de l'argument de $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. L'Au. détermine un cercle concentrique ayant la même propriété mais ne dépendant que de la valeur absolue $\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|$: si $\varrho = \min \left(\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|^{\frac{1}{m+1}}, \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^{\frac{1}{m+1}} \right) \neq 1$, ce cercle est de rayon $\frac{1+\varrho}{1-\varrho} R$; un exemple prouve que cette valeur ne peut être améliorée.

J. Dieudonné (Nancy).

Ostrowski, Alexandre: Addition à notre mémoire: „Recherches sur la méthode de Graeffe et les zéros des polynômes et des séries de Laurent“. (Acta mathematica 72, 1940/41.) Acta math. 75, 183—186 (1943).

Verf. nimmt zu zwei Arbeiten von R. San Juan Stellung (vgl. dies. Zbl. 11, 265; 25, 269), welche die von J. Rey Pastor in seinen Lecciones de Álgebra (2. Aufl., Madrid 1935, S. 89—105) gegebene Darstellung des Graeffesschen Verfahrens weiterführen; diese Arbeiten waren in der im Titel genannten Abhandlung des Verf. (dies. Zbl. 23, 334) unberücksichtigt geblieben. — Verf. beanstandet einen ungenau ausgesprochenen Satz von J. Rey Pastor, der den weiteren Entwicklungen der genannten Autoren zugrunde liegt und folgenden Inhalt hat: Sind x_1, \dots, x_n die Wurzeln der Gleichung $f(x) \equiv a_0 x^n + \dots + a_n = 0$, x'_1, \dots, x'_n diejenigen von

$f(x) - \delta = 0$, so gilt bei passender Numerierung $|x'_i - x_i| \leq \sqrt[n]{|\delta/a_0|}$ ($i = 1, \dots, n$). Tatsächlich folgt nur, daß jeder Wurzel x_i der ersten Gleichung eine gewisse Wurzel x'_i der zweiten und jeder Wurzel x'_j der zweiten eine gewisse Wurzel x_{μ_j} der ersten Gleichung zugeordnet werden kann (ohne daß diese Zuordnung notwendig eineindeutig wäre), welche die angegebene Ungleichung befriedigen. Daher seien auch die weiteren Resultate der genannten Autoren ungenügend begründet. Gröbner (Braunschweig).

San Juan, R.: À propos du mémoire: „Recherches sur la méthode de Graeffe... etc.“ par Alexandre Ostrowski, à Bâle. Acta math. 75, 187—190 (1943).

Verf. entgegnet auf den Einwurf von A. Ostrowski (vgl. vorsteh. Referat), indem er den angeführten Satz von J. Rey Pastor genauer präzisiert (eine deutsche Übersetzung des Beweises von Rey Pastor ist angeschlossen) und bemerkt, daß die Tragweite des Satzes auch in der genaueren Fassung vollkommen ausreicht, um die weiteren, von J. Rey Pastor und von ihm selbst gezogenen Schlüsse zu rechtfertigen.

Gröbner (Braunschweig).

Gruppentheorie:

● **Scorza, Gaetano:** Gruppi astratti. A cura di Giuseppe Scorza Dragoni e Guido Zappa. Prefaz. di Francesco Severi. Roma: Ediz. Cremonese 1942. VII, 242 pag. L. 80.—

Das vorliegende Buch befaßt sich nur mit der Theorie der abstrakten Gruppen und verzichtet auf die Theorie der Darstellungen und die Theorie der Charaktere. Dieser Verzicht bringt es mit sich, daß auch einige nicht unwichtige Sätze aus der Theorie der abstrakten Gruppen, die bisher nur auf dem Umwege über die Darstellungen bzw. die Charaktere bewiesen werden konnten, in das Buch nicht aufgenommen werden konnten. Innerhalb des so gegebenen Rahmens bringt Verf. alle wesentlichen Ergebnisse der Gruppentheorie. Neue, bisher unbekannte Forschungsergebnisse werden nicht mitgeteilt. — Im ersten Kapitel werden zunächst die Axiome in der üblichen Form aufgestellt und dann die ersten Begriffsbildungen der periodischen und aperiodischen Elemente, Untergruppen, Normalteiler usw. vorgenommen. Das zweite Kapitel behandelt die Begriffe des Isomorphismus und des Homomorphismus und ihre Anwendungen. Dann folgen im dritten Kapitel die Begriffe der Kommutatorgruppe und der

höheren Ableitungen, der Normalreihe, der Hauptreihe und der Kompositionsreihe; auch die Baersche Begriffsbildung des Kerns einer endlichen Gruppe hat, nach Auffassung des Ref. überflüssiger Weise, hier Aufnahme gefunden. Im vierten Kapitel werden die Normalisatoren der Elemente und die damit in Zusammenhang stehenden Sätze behandelt, es handelt sich dabei hauptsächlich um Forschungen der italienischen Schule und speziell des Verf. Das fünfte Kapitel bringt einige Struktursätze sowie die Theorie der Erweiterung. Es folgen im sechsten Kapitel die Sylowsätze und einige der wichtigsten Sätze über p -Gruppen. Im Schlußkapitel wird die Theorie der Verlagerung behandelt und im Anschluß daran werden die Sätze von Grün und Burnside über die Abbildung einer Gruppe auf ihre Sylowgruppen bewiesen. — Die Darstellung ist überall klar und einwandfrei, das Buch lebhaft und interessant geschrieben.

Grün (Berlin).

Ringe. Körper:

● Almeida Costa, A.: Abelsche Gruppen, nichtkommutative Ringe und Ideale, hyperkomplexe Systeme und Darstellungen. Bd. 1. (Publ. do Centro de Estudos de Mat. Nr. 3.) Pôrto: Fac. de Ciênc. 1942. 180 S. [Portugiesisch].

Der Band behandelt die Theorie der Moduln in bezug auf einen Ring und als Sonderfall die Theorie der als \mathfrak{S} -Moduln betrachteten ein- und zweiseitigen Ideale eines Ringes \mathfrak{S} . Die Elemente der Gruppentheorie und das Notwendigste über Ringe und Ideale werden als bekannt vorausgesetzt. Die erste, dem allgemeinen Begriff des \mathfrak{S} -Moduls gewidmete Hälfte gliedert sich nach der besonderen Beschaffenheit von \mathfrak{S} : Ring mit Einselement, Körper, kommutativer Körper, Integritätsbereich, Ring mit Divisionsalgorithmus. Der damit vollzogene Einbruch in die lineare Algebra wird durch die Theorie der linearen Gleichungen mit Koeffizienten aus einem beliebigen oder kommutativen Körper und den Hauptsatz über Abelsche Gruppen (mit Operatoren) ergänzt. Die restlichen Kapitel wenden die gewonnenen Erkenntnisse auf den Sonderfall der Ideale an; auf die allgemeinen Begriffe und Sätze folgen die Theorie der halbeinfachen Ringe und der Ringe mit Doppelkettenbedingung. Im einzelnen enthält das Buch in seiner Zusammenstellung und mit lückenlosen Beweisen etwa den Inhalt der entsprechenden Kapitel in den führenden modernen Werken über Algebra, gerät aber in der Darstellungsweise nirgends in Abhängigkeit von diesen.

Weber (Berlin).

● Almeida Costa, A.: Elemente der Theorie der Ringe. (Publ. do Centro de Estudos de Mat. Nr. 7.) Pôrto: Fac. de Ciênc. 1943. 286 S.

Unter Voraussetzung der Gruppentheorie werden diejenigen grundlegenden Kapitel der modernen Algebra entwickelt, die keinen gruppen- oder modultheoretischen Charakter tragen (vgl. vorsteh. Ref.). Nach den in Kap. I gebrachten einführenden Begriffen und Sätzen über Ringe stößt Kap. II zum Begriff des (ein- und zweiseitigen) Ideals vor, der sogleich unter den Gesichtspunkt der Homomorphismen und Kongruenzen gestellt wird. Kap. III behandelt das Allgemeinste über Polynome und rationale Funktionen. In Kap. IV wird für Ringe mit Teilerkettensatz die Zerlegung der Ideale in größte Primärkomponenten hergeleitet und auf algebraische Mannigfaltigkeiten angewandt; zugleich enthält das Kapitel die Theorie der Faktorzerlegung von Ringelementen und als Abschluß die Lehre von den Resultanten. Kap. V ist den algebraischen und transzendenten Erweiterungen kommutativer Körper, insbesondere der Galoisschen Theorie gewidmet. Kap. VI endlich führt, vom Beispiel der ganzen algebraischen Zahlen ausgehend, den Begriff der Ganzheit in bezug auf einen Ring ein und gelangt mittels des Begriffs der ganzen Abgeschlossenheit im Quotientenkörper zum Dedekindschen Hauptsatz der Idealtheorie in axiomatischer Deutung. Das Buch will nirgends Originalarbeit sein; es gibt die bekannten Definitionen und Beweise ohne Lücken in neuer Zusammenstellung wieder. Der Leser soll an jede gangbare Abstraktion gewöhnt werden. Das äußert sich insbesondere in der steten Betonung

der nichtkommutativen Ringe (auch ein Exkurs über Quasiringe ist eingestreut) und der ausführlichen Behandlung der unvollkommenen Körper und der inseparablen Erweiterungen.
Weber (Berlin).

Dieudonné, Jean: Sur le nombre de dimensions d'un module. C. R. Acad. Sci., Paris **215**, 563—565 (1942).

Es sei A ein Ring mit dem Einselemente e und M ein n -gliedriger A - (Links-) Linearformenmodul mit dem Einheitsoperator e . Verf. beweist, daß in den folgenden zwei Fällen die Gliederzahl n von der Basiswahl unabhängig ist: 1. A liegt in einem Ring B , der als B - (Links-) Modul eine Kompositionsreihe besitzt; 2. A ist kommutativ. Ferner gibt Verf. ein Beispiel (A ist der Operatorenring eines Vektorraumes mit unendlich abzählbarer Basis in bezug auf einen Schiefkörper, und M ist dieser Ring als A -Modul), in dem, je nach der Basiswahl, n beliebige Werte annehmen kann. O. Boruvka.

Whitehead, J. H. C.: Note on linear associative algebras. J. Lond. Math. Soc. **16**, 118—125 (1941).

Neuer Beweis des Dickson'schen Satzes, daß jedes hyperkomplexe System A direkte Summe von seinem Radikal N und einem halbeinfachen System ist. Der Beweis gilt im Fall der Charakteristik Null, allgemeiner in dem Fall, daß die quadratische Matrix $g_{\lambda\mu} = \gamma_{\alpha\lambda}^e \gamma_{e\mu}^\sigma$ des Restklassenringes $A - N$ nicht singulär ist. Der Satz ist ein Spezialfall eines noch allgemeineren Satzes über Doppelmoduln E , die ein halbeinfaches hyperkomplexes System S als Links- und als Rechts-Operatorenbereich haben. Dieser allgemeinere Satz gibt die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems der Gestalt $\theta_{\lambda_1} x_{\lambda_2} \dots x_{\lambda_q} = c_{\lambda_1 \dots \lambda_q}$ im Doppelmodul E . Einen analogen Satz für Lie-Ringe hat Verf. früher [Quart. J. of Math. **8**, 220—237 (1937); dies. Zbl. **17**, 200] bewiesen. Zum Schluß wird eine Verallgemeinerung eines anderen Satzes über Lie-Ringe aus derselben Arbeit bewiesen.

van der Waerden (Leipzig).

Taussky, Olga, and John Todd: Infinite powers of matrices. J. London Math. Soc. **17**, 146—151 (1942).

Es sei S ein hyperkomplexes System über dem Körper R aller reellen Zahlen; e_1, \dots, e_n sei eine beliebige Minimalbasis von S über R . Dann verstehen Verff. unter $A(S)$ die unabhängig von der speziellen Basiswahl eindeutig bestimmte Menge aller

der Elemente $x = \sum_{i=1}^n x_i^{(1)} \cdot e_i$, bei denen $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = 0$ ($i = 1, \dots, n$), falls $x^k = \sum_{i=1}^n x_i^{(k)} \cdot e_i$.

Ist speziell S gleich R oder gleich dem Körper C aller komplexen Zahlen oder gleich dem Quaternionenkörper Q , so besteht $A(S)$ offenbar gerade aus allen und nur den x , für die $|x| < 1$. Andererseits gilt der folgende von O. Taussky schon früher (s. dies. Zbl. **15**, 56) bewiesene Satz: Ist \bar{S} das Radikal von S , und verstehen wir unter \bar{S} den Restklassenring S/R , so besteht $A(\bar{S})$ gerade aus allen und nur den Restklassen, die Elemente aus $A(S)$ enthalten. — Mit Hilfe dieser Bemerkungen und durch die Konstruktion einfacher Beispiele beweisen Verff. ohne nennenswerte Schwierigkeit die folgenden Sätze: $A(S)$ ist dann und nur dann beschränkt, [$|x_i^{(1)}| < M$ ($i = 1, \dots, n$) für jedes

$x = \sum_{i=1}^n x_i^{(1)} \cdot e_i$ aus $A(S)$], wenn S die direkte Summe von zu R oder C oder Q isomorphen einfachen Systemen darstellt. — $A(S)$ enthält dann und nur dann gleichzeitig mit zwei Elementen stets auch ihr Produkt, bzw. $A(S)$ ist dann und nur dann konvex $\left(\frac{x+y}{2} \text{ in } A(S), \text{ falls } x \text{ und } y \text{ in } A(S)\right)$, wenn $\bar{S} = S/R$ eine direkte Summe von zu R, C oder Q isomorphen Systemen ist. — Im letzten Teil der Note werden schließlich auf dem Weg über die regulären Darstellungen der hyperkomplexen Systeme gewisse Zusammenhänge zwischen $A(S)$ und neueren matrizentheoretischen Untersuchungen von N. H. McCoy (dies. Zbl. **22**, 107) aufgedeckt. Doch können wir auf diesen Punkt hier nicht näher

eingehen, da die Aufzählung der nötigen Hilfsdefinitionen im Vergleich zu den schließlichen Ergebnissen einen unverhältnismäßig großen Platz beanspruchen würde.

Krull (Bonn).

Zahlkörper. Funktionenkörper:

Scholz †, Arnold: Zur Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern. J. reine angew. Math. 185, 113—126 (1943).

Es handelt sich um einen Neuaufbau der Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern in dem Sinne, wie er in mehreren Arbeiten von Krull und Herbrand entwickelt wurde (vgl. etwa Math. Z. 29, 31; Math. Ann. 100 bzw. Math. Ann. 106, 108; dies. Zbl. 4, 244, 7, 294). Charakteristisch für die Arbeit ist vor allem, daß Verf. die Betrachtung der unendlichen algebraischen Normalkörper an die Spitze stellt, für sie die Theorie der Galoisgruppe von Grund auf neu entwickelt und mit Hilfe der topologischen Abgeschlossenheit dieser Gruppe die wichtigsten Tatsachen über den Aufbau der Ideale in unendlichen algebraischen Normalkörpern ableitet, wobei der merkwürdigerweise weder von Krull noch von Herbrand benutzte Satz, daß auch im unendlichen Galoiskörper alle Primidealteiler einer Primzahl untereinander konjugiert sind, eine zentrale Rolle spielt. Der Primidealzerfall in einem nichtnormalen unendlichen algebraischen Zahlkörper kann dann aus dem in seinem zugehörigen Galoiskörper mit Hilfe des bekannten Dedekindschen Satzes über Primidealzerlegung in Unterkörpern gewonnen werden, da die Übertragung dieses letzten Satzes auf den unendlichen Fall sich als durchführbar erweist. — Im Anschluß an die grundlegenden Sätze wird weiterhin die Theorie der Zerlegungs- und Trägheitsgruppen der Primideale in unendlichen algebraischen Normal- und Relativ-Normalkörpern in allen wichtigen Einzelheiten entwickelt, wobei neben den Ergebnissen von Herbrand auch solche von Deuring (dies. Zbl. 3, 2) ausführlich berücksichtigt werden. — Ein besonderer Vorzug der Arbeit liegt in den zahlreichen Beispielen, durch die die Hauptsätze über den Aufbau der Ideale veranschaulicht werden; sie sind in erster Linie dem Körper aller Einheitswurzeln (also dem größten absolut Abelschen Zahlkörper), sowie geeigneten Unterkörpern entnommen.

Krull (Bonn).

Benneton, Gaston: Sur l'arithmétique des quaternions et des biquaternions. Ann. École norm., III. s. 60, 173—214 (1943).

Die Abhandlung besteht aus zwei Teilen, der erste Teil befaßt sich mit den rationalen Quaternionen, der zweite Teil mit den rationalen Cayleyzahlen, die vom Verf. Biquaternionen genannt werden. Untersucht werden vor allem die ganzen Quaternionen und Biquaternionen im Sinne von Lipschitz (d. h. diejenigen mit ganzrationalen Komponenten) und ihre Teilbarkeitsgesetze. Die Literatur der letzten 20 Jahre bleibt dabei unberücksichtigt. Die weitläufigen Betrachtungen des Verf. zeigen, wie unzweckmäßig seine Ganzheitsdefinition ist. Aus den einfachen für maximale Ordnungen geltenden Sätzen würden sich alle Resultate auf wenigen Seiten gewinnen lassen.

Brandt (Halle).

Zahlentheorie:

Thébault, V.: Les récréations mathématiques. (Parmi les nombres curieux.) Mathesis 54, Nr 10, Suppl. 1—80 (1943).

Der Untertitel ist präziser; es handelt sich ausschließlich um elementare Untersuchungen und Aufgaben, die mit der Darstellung von natürlichen Zahlen in verschiedenen Ziffernsystemen zusammenhängen. U. a. wird folgender Satz bewiesen („un nouveau théorème d'arithmétique“): Ist $N = 123 \dots n$ die im System mit der Basis $n + 1$ geschriebene Zahl, die alle Ziffern außer Null in wachsender Ordnung zeigt, und λ eine zweiziffrige Zahl $\alpha\beta$ mit $\alpha + \beta < n$ und $(\alpha + \beta, n) = 1$, dann weist das Produkt $N\lambda$ jede der Ziffern 0, 1, 2, ..., n genau einmal auf.

Sprague (Berlin).

Roussel, André: Sur certaines applications arithmétiques de la théorie des résidus. C. R. Acad. Sci., Paris **216**, 20—21 (1943).

Verf. behauptet folgenden Satz: Zwei ganze Zahlen m und n sind dann und nur dann relativ prim, wenn die Gleichung

$$\sin^2 \pi z + \sin^2 \pi \left(\frac{m}{z} \right) + \sin^2 \pi \left(\frac{n}{z} \right) = 0$$

nur eine reelle Nullstelle besitzt. Der Beweis wird mittels des Residuensatzes geführt, ist mir aber nicht in allen Schritten klargeworden. *E. Hlawka* (Wien).

Bunický, E.: Kettenbruchentwicklungen der Quadratwurzeln aus den ganzen rationalpositiven inexakten Quadraten. Věstn. Královské české Spol. Nauk **1942**, Nr 10, 1—13 (1943).

Verf. untersucht die Bedingungen, wann ein unendlicher periodischer Kettenbruch mit symmetrischer Periode die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl darstellt. *Holzer*.

Skolem, Th.: Die Anzahl der Wurzeln der Kongruenz $x^3 + ax + b \equiv 0 \pmod{p}$ für die verschiedenen Paare a, b . Norske Vid. Selsk., Forh. **14**, 161—164 (1942).

Verf. zeigt: Für eine Primzahl $p \equiv 1 \pmod{3}$ hat die Titeltkongruenz der Reihe nach für $p-1$, $p(p-1)/2$, $(p-1)^2/3$, $(p-4)(p-1)/6$ Paare (a, b) zwei, eine, keine oder drei Wurzeln. Für $p \equiv 2 \pmod{3}$ und zwar $p > 2$ sind die entsprechenden Anzahlen $p-1$, $(p-2)(p-1)/2$, $(p+1)(p-1)/3$, $(p-2)(p-1)/6$. *Holzer* (Graz).

Skolem, Th.: Ein Zusammenhang zwischen der Kongruenz $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \equiv 0 \pmod{m}$ und der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = m$. Norsk mat. Tidsskr. **25**, 76—87 (1943) [Norwegisch].

Die Frage nach der Lösungszahl der diophantischen Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = m$ wird als die nach der Anzahl der ganzzahligen Quaternionen A mit $NA = m$ (N bezeichnet die Norm) gedeutet. $A = a + bi + cj + dk$ heißt \pmod{m} primitiv, wenn $(a, b, c, d, m) = 1$; A heißt \pmod{m} rechtsassoziert zu B , wenn $A \equiv BC \pmod{m}$, $(NC, m) = 1$. Das Kernstück der Arbeit besteht nun in dem Satz: Ist m ungerade, so ist zu jeder primitiven Lösung A der Kongruenz $NA \equiv 0 \pmod{m}$ eine und bis auf die acht Einheitsfaktoren auch nur eine primitive Lösung B der Gleichung $NB = m$ rechtsassoziert. (Im Beweis ist auf S. 82, Z. 14 an Stelle der Gleichung irrtümlich die Kongruenz gesetzt.) Die (durch 8 geteilte) Anzahl der primitiven B ist also gleich der Anzahl der nicht rechtsassozierten primitiven A . Es wird nun gezeigt, daß die letzteren auf Grund eines viel allgemeineren Satzes sämtlich in der Gestalt $A \equiv a + bi + cj \pmod{m}$ gewählt werden können, so daß ihre Zählung auf das Studium der Kongruenz $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 0 \pmod{m}$ hinausläuft. Verf. hat diese Kongruenz bereits behandelt (Norske Vid. Selsk., Forh. **14**, Nr. 43) und bringt mit ihrer Hilfe die Anzahl der B für den Fall, daß m eine Primzahlpotenz p^n ist, in die Gestalt $p^{n-1}(p+1)$. Da die Anzahl multiplikativ ist, so erhält man nach Hinzunahme der imprimitiven Lösungen den bekannten Ausdruck $8 \sum d$, wo d die positiven Teiler von m durchläuft. Daß bei geradem m dafür $24 \sum d$ stehen muß, wo d jetzt nur noch die positiven ungeraden Teiler von m durchläuft, ergibt sich durch eine kurze Zusatzbetrachtung. *Weber* (Berlin).

Hua, Loo-keng: A note on the class number of ternary quadratic forms. J. Lond. Math. Soc. **16**, 82—83 (1941).

Es wird gezeigt, daß die Klassenzahl der positiv-definiten ternären quadratischen Formen von der Diskriminante d (< 0) mit $-d$ über alle Grenzen wächst, und zwar auch dann, wenn man für die gemischten Glieder nur gerade Koeffizienten zuläßt. Zu diesem Zwecke wird rasch bewiesen, daß für je zwei inäquivalente binäre quadratische Formen $f(x, y)$ und $g(x, y)$ mit der Diskriminante $d < 0$, die nicht beide die Zahl 1 darstellen, auch die positiv-definiten ternären Formen $f(x, y) + z^2$ und $g(x, y) + z^2$ von derselben Diskriminante inäquivalent sind. Da die Klassenzahl jener binären Formen auch dann noch mit $-d$ über alle Grenzen wächst, wenn der Mittelkoeffizient auf gerade Zahlen beschränkt und die (dann einzige) die Zahl 1 darstellende Klasse ausgeschlossen wird, so folgt die Behauptung. *Weber* (Berlin).

Kuhn, Pavel: Eine Formel für die Summe der Möbius-Faktoren. Norske Vid. Selsk., Forh. **13**, 112—114 (1941).

V. Brun hat eine Formel für $\sigma(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \mu(n)$ angegeben. (Vgl. Netto, Lehrbuch der Kombinatorik, 2. Aufl. (1927), S. 277 und zwei Arbeiten des Verf., s. dies. Zbl. **22**, 205 u. 310; im letzteren Referat findet man diese Formel in drei Gestalten aufgeschrieben.) Verf. leitet aus dieser Formel noch folgende Gleichung ab:

$$(1) \quad \sigma(x) - \sigma\left(\frac{1}{2}x\right) = 1 - [x] + \sum_{2 \leq n \leq \frac{1}{2}x} \left[\frac{x}{n}\right] - \sum_{\substack{n, m \geq 2 \\ nm \leq \frac{1}{2}x}} \left[\frac{x}{nm}\right] + \dots$$

Schreibt man dagegen in (1) rechts in der oberen Summationsgrenze x statt $\frac{1}{2}x$, so wird die rechte Seite von (1) gleich Null (dies ist die Formel (7) auf S. 114, in welcher am Anfang 1 statt 2 und am Ende \dots stehen soll). *Jarník (Prag).*

Kuhn, Pavel: Zu den Mittelwerten zahlentheoretischer Funktionen. Norske Vid. Selsk., Forh. **14**, 157—160 (1942).

Ist $B_m(x)$ das m -te Bernoullische Polynom, n eine natürliche Zahl, x reell, $r/n = x/n - [x/n]$, so ist

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} [x_m/n] dx_m = n^m \left(B_{m+1}\left(\frac{x}{n}\right) - B_{m+1}\left(\frac{r}{n}\right) \right).$$

Zu dem hinzugefügten Beispiel werde bemerkt: In (11) bedeutet x nicht die Veränderliche aus (10), sondern die obere Integrationsgrenze aus (14), (17); in (14) bedeutet die eckige Klammer eine gewöhnliche Klammer, nicht die Funktion $[x]$. In (17) scheint es dem Ref., daß die elementare, zu (15) analoge Abschätzung nur zu einem Restglied $O(x^{-1})$ führt.

Jarník (Prag).

Kössler, M.: Einige Sätze aus der elementaren Zahlentheorie. Věstn. Královské české Spol. Nauk **1942**, Nr 20, 1—18 (1943).

Es werden zunächst zwei Identitäten abgeleitet; dabei ist N eine natürliche Zahl;

$f(n)$, $g(n)$, $v(n)$ sind für $n = 1, 2, \dots, N$ definiert, $V(k) = \sum_{1 \leq v \leq N/k} v(k)$, $G(n) = \sum_{k=1}^n g(k)$. Weiter ist (1) $q_1 < q_2 < \dots$ eine Folge natürlicher Zahlen, $F(n) = \sum_{q_i | n} f(q_i)$. Dann ist

$$(I) \quad \sum_{q_i \leq N} f(q_i) V(q_i) = \sum_{n=1}^N F(n) v(n).$$

Ist weiter ρ ganz, $1 \leq \rho \leq N$, $r = \left[\frac{N}{\rho + 1} \right]$, so ist (man setze $f(0) = G(0) = 0$ und schreibe $f[x]$ statt $f([x])$)

$$(II) \quad \sum_{k=1}^N g(k) f\left[\frac{N}{k}\right] = \sum_{k=1}^r g(k) f\left[\frac{N}{k}\right] + \sum_{k=1}^{\rho} (f(k) - f(k-1)) G\left[\frac{N}{k}\right] - f(\rho) G(r).$$

Beispiele zu (II): $\pi(\rho) \pi(r) = \sum_{p \leq r} \pi\left(\frac{N}{p}\right) - \sum_{p > r} \pi\left(\frac{N}{p}\right)$; $\sum_{k=1}^N \pi\left(\frac{N}{k}\right) = \sum_{p \leq N} \left[\frac{N}{p}\right]$;

$$\sum_{n=1}^N (\theta_{01}(n) - \theta_{23}(n)) = \frac{1}{4} (\pi - 2 \log 2) N + O(N^{\frac{1}{2}}),$$

wo $\theta_{ij}(n)$ die Anzahl der Teiler von n bezeichnet, die $\equiv i$ oder $\equiv j \pmod{4}$ sind. — Ist speziell (1) die Folge aller Primzahlpotenzen, $f(p^k) = \log p$ für ganzes $k > 0$, so liefert

(I) die Identität (2) $\sum_{p \leq N} \log p \sum_{p^k \leq N} V(p^k) = \sum_{n=1}^N v(n) \log n$. Die Wahl $q_k = k$, $f(n) = 1$ oder

$= \log n$ gibt weiter (3) $\sum_{n=1}^N v(n) \theta(n) = \sum_{n=1}^N V(n)$, (4) $\sum_{n=1}^N v(n) \theta(n) \log n = 2 \sum_{n=1}^N V(n) \log n$,

wo $\theta(n)$ die Teileranzahl von n ist. Die linke Seite von (2) läßt sich auch in der oft vorteilhaften Gestalt

$$\sum_{p \leq N} \log p \cdot W(p, 1) + \sum_{p \leq \frac{1}{2}N} \log p \cdot W(p, 2) + \sum_{p \leq \frac{1}{3}N} \log p \cdot W(p, 3) + \dots$$

schreiben; dabei ist $W(p, \nu) = \sum \nu(\nu p^k)$, wo über alle $k > 0$ mit $\nu p^k \leq N$ summiert wird. Aus (2) folgt z. B. (für $\nu(n) = n^s$) $\sum_{k=1}^N k^s \psi\left(\frac{N}{k}, s\right) = \sum_{n=1}^N n^s \log n$, wo

$$\psi(x, s) = \sum_{p \leq x} p^s \frac{p^{\lambda s} - 1}{p^s - 1} \log p, \quad \lambda = \lambda(x, p) = \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor;$$

weitere analoge Formeln sind (4, 9), (4, 12) (wo aber das Vorzeichen rechts $(-1)^k$ sein soll). — Aus der Definitionsgleichung für V folgt $v(k) = \sum_{\nu \leq N/k} \mu(\nu) V(\nu k)$, so daß (3),

(4) Identitäten über die Möbiussche Funktion μ liefern, z. B. $\sum_{n=1}^N \theta(n) \sum_{\nu \leq N/n} \mu(\nu) = N$ usw.

(vgl. (6, 7), (6, 8), (6, 9)). — Manche von diesen Identitäten nehmen eine prägnantere Form an, wenn man sie mit Hilfe von „Mittelwerten“

$$M(\varphi(k); \psi(k)) = \sum_{k=1}^N \varphi(k) \psi(k) \cdot \left(\sum_{k=1}^N \psi(k) \right)^{-1}$$

aufschreibt. Da die rechten Seiten meistens leicht abzuschätzen sind, bekommt man so auch asymptotische Abschätzungen. — Die Abschätzung in (4, 11) (in welcher übrigens das letzte Vorzeichen in der ersten Klammer \pm sein soll) scheint auf einem Versehen zu beruhen, da auf S. 9, Z. 4 v. u. überall Nk^{-1} statt N stehen soll, was nachher zu einer schlechteren Abschätzung führt. — Auf S. 10, Z. 6 lies $\nu(n) = n^s \sin \frac{1}{2} \pi n$; auf S. 11 unten lies ψ statt φ . Jarník (Prag).

Selberg, Sigmund: Über die zahlentheoretische Funktion $\pi_n(x)$. Norske Vid. Selsk. Forh. 13, 30—33 (1941).

Ist $0 < \xi \leq x$, $0 \leq \nu \leq n$ (ν, n ganz), so sei $\pi_{\nu, n}(\xi, x)$ die Anzahl derjenigen quadratfreien Zahlen $\leq x$, welche aus genau n Primfaktoren zusammengesetzt sind, von welchen genau ν höchstens gleich ξ sind. Die Summe

$$(1) \quad \pi_n(x) = \pi_{0, n}(\xi, x) + \dots + \pi_{n, n}(\xi, x)$$

ist dann die Anzahl aller quadratfreier Zahlen $\leq x$, welche genau n Primfaktoren enthalten. Aus dem Primzahlsatz $\pi(x) = \pi_1(x) \sim x/\log x$ und aus gewissen Identitäten, durch welche die $\pi_{\nu, n}$ verknüpft sind, folgt erstens: ist $0 < \sigma < 1/n$ (σ konstant), $\xi = x^\sigma$, so überwiegt in (1) rechts das Glied $\pi_{n-1, n}$, d. h. (2) $\pi_{n-1, n}(x^\sigma, x) \sim \pi_n(x)$; und zweitens: für diese σ ist

$$(3) \quad \pi_{n-1, n}(x^\sigma, x) \sim \frac{x (\log \log x)^{n-1}}{(n-1)! \log x}.$$

Daraus folgt ein altes Landausches Ergebnis, daß nämlich $\pi_n(x)$ asymptotisch gleich der rechten Seite von (3) ist. Wie Verf. ohne Beweis angibt, läßt sich seine neue Methode zu schärferen Resultaten ausarbeiten; z. B. gilt (2) bereits dann, wenn $\sigma = \sigma(x)$ eine Funktion von x mit $\liminf \sigma(x) > 0$, $\limsup \sigma(x) < 1$ (für $x \rightarrow \infty$) ist; und für $\pi_n(x)$ läßt sich eine Formel herleiten, deren Restglied die Größenordnung $o(x/\log x)$ hat. Die Arbeit, in welcher diese und noch schärfere Resultate bewiesen werden, ist bereits erschienen (s. dies. Zbl. 28, 11). Jarník (Prag).

Selberg, Sigmund: Bemerkung zu einer Arbeit von Viggo Brun über die Riemannsche Zetafunktion. Norske Vid. Selsk., Forh. 13, 17—19 (1941).

Beweis des folgenden Satzes: Ist $\Re(s) > 0$, so ist

$$(1) \quad \xi(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{s-1} + 2^{s(s-1)} + \dots + 2^{k_n(s-1)}}{n^s}, \quad \text{wo} \quad k_n = \left\lfloor \frac{\log n}{\log 2} \right\rfloor.$$

(1) wurde — in einer formal etwas abweichenden Gestalt — von V. Brun (s. dies. Zbl. 21, 222) für $s > 1$ angegeben. Durch Multiplikation mit $1-2^{1-s}$ entsteht noch aus (1) die Formel

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{k_n(s-1)}}{n^s} = 1 - \frac{1-2^{1-s}}{s-1}.$$

Jarník (Prag).

Kuhn, Pavel: Zur Viggo-Brunschens Siebmethode. 1. Norske Vid. Selsk., Forh. **14**, 145—148 (1942).

Aus einem Satz von Tartakowski [Sur quelques sommes . . ., C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **29** (1940), No 2; die Arbeit war mir unzugänglich] leitet Verf. folgenden Satz her: Ist $A(x)$ die Anzahl derjenigen zwischen x und $x + \sqrt{x}$ liegenden Zahlen, die aus höchstens vier Primfaktoren zusammengesetzt sind, so ist $A(x) \geq 2,3 \cdot e^{-C} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\log x}$ für hinreichend große x (C ist die Eulersche Konstante). Druckfehler: auf S. 146 in den beiden letzten Ungleichungen lies $>$ statt $<$. *Jarník (Prag).*

Mordell, L. J.: On the minimum of a binary cubic form. J. Lond. Math. Soc. **16**, 83—85 (1941).

Durch $x = \alpha\xi + \beta\eta$, $y = \gamma\xi + \delta\eta$, ($\alpha\delta - \beta\gamma = 1$) ist ein ebenes Gitter gegeben. Es gibt Gitterpunkte $G_i \neq O(0, 0)$ ($i = 1, \dots, 5$), so daß

$$|x^3 - xy^2 - y^3| \leq 1 \text{ für } G_1; \quad |x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3| \leq 1 \text{ für } G_2;$$

$$|xy(x + y)| \leq \frac{1}{\sqrt[4]{7}} \text{ für } G_3; \quad |y(x^2 + y^2)| \leq \sqrt[4]{\frac{4}{23}} \text{ für } G_4;$$

$$|x^3 + y^3| \leq \sqrt[4]{\frac{27}{23}} \text{ für } G_5.$$

Das sind Beispiele für nicht-konvexe Bereiche, die von Kurven vom Grad 3 begrenzt sind. Keine der Schranken kann verkleinert werden. *Hofreiter (Wien).*

Mordell, L. J.: Some results in the geometry of numbers for non-convex regions. J. Lond. Math. Soc. **16**, 149—151 (1941).

Durch $x = \alpha\xi + \beta\eta$, $y = \gamma\xi + \delta\eta$, ($\alpha\delta - \beta\gamma = \Delta > 0$) ist ein Gitter gegeben; $f(x, y)$ sei eine homogene Funktion mit der Dimension p . Es sei k die kleinste Zahl derart, daß $|f(|x|, |y|)| \leq k\sqrt[p]{\Delta^p}$ für einen von $(0, 0)$ verschiedenen Gitterpunkt lösbar ist. Gitter, für die das = Zeichen gilt, heißen kritische Gitter. Es werden 5 Beispiele von Formen $f(x, y)$ betrachtet, die zugehörigen Werte von k angegeben und die kritischen Gitter geometrisch gedeutet. *Hofreiter (Wien).*

Mordell, L. J.: Lattice points in the region $|Ax^4 + By^4| < 1$. J. Lond. Math. Soc. **16**, 152—156 (1941).

Ist L ein Gitter mit der Determinante $\Delta > 0$, so gibt es stets einen Gitterpunkt $\neq (0, 0)$ in L , so daß für ihn $x^4 + y^4 \leq 1$ gilt, wenn $2\Delta^2 \leq -3 + 2\sqrt{6}$ ist. (Diese Schranke kann nicht mehr verbessert werden). Der Beweis dieses Satzes, der ein Spezialfall einer Minkowskischen Vermutung ist, erfolgt mit zahlengeometrischen Überlegungen. *Hofreiter (Wien).*

Watson, G. N.: Proof of a conjecture stated by Mordell. J. Lond. Math. Soc. **16**, 157—166 (1941).

Für die Untersuchungen von Mordell zur Geometrie der Zahlen für nichtkonvexe Bereiche ist es wertvoll, einen Beweis für den Satz zu gewinnen: Die Kurve, die durch $\{(x+1)^p - 1\} \{(y+1)^p - 1\} = (1-x^p)(1-y^p)$ gegeben ist ($0 < p < 1$), wird von jeder Geraden parallel zu $x + y = 0$ in höchstens 2 Punkten im positiven Quadranten geschnitten. Hier wird ein auf mehreren Hilfssätzen beruhender Beweis gegeben. *Hofreiter (Wien).*

Hlawka, Edmund: Zur Geometrie der Zahlen. Math. Z. **49**, 285—312 (1943).

Es sei $\Gamma(K)$ die Klasse aller konvexen Körper des R_n mit dem Mittelpunkt v , die aus K durch volumtreue, affine Transformationen hervorgehen. Nach einer Vermutung von Minkowski gibt es in $\Gamma(K)$ stets einen Körper K' , der, abgesehen von v , gitterpunktfrei ist, sobald das Volumen $V < 2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-n}$ ist. Hier wird diese Vermutung, für die es bisher nicht einmal für spezielle Werte von n einen Beweis gab, allgemein bewiesen.

Der Beweis ist rein analytisch und beruht auf dem folgenden Deformationssatz: Ist $\varphi(x)$ reell, beschränkt, im Riemannschen Sinne integrierbar und außerhalb des Würfels $|x_i| \leq \frac{K}{2}$ ($i = 1, \dots, n$) identisch 0, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine unimodulare Matrix \mathfrak{A} , so daß

$$\sum_{g \neq 0} \varphi(\mathfrak{A}g) \leq \int_{R_n} \varphi(x) dx + \varepsilon$$

ist. Dabei wird links über alle Gitterpunkte $g \neq 0$ und rechts über den ganzen Raum R_n summiert bzw. integriert [x und g sind Abkürzungen für die Punkte (x_1, \dots, x_n) und (g_1, \dots, g_n)]. Die folgenden Abschnitte bringen Verallgemeinerungen des Minkowskischen Fundamentalsatzes und enthalten als Spezialfälle Sätze von Siegel, v. d. Corput, Schaafe und Mordell. Ein Alternativsatz besagt: Besitzt der konvexe Körper K ein Volumen $V \geq 2^{n-1} k_0$ (k_0 natürliche Zahl) und gibt es höchstens $k_0 - r - 1$ Gitterpunktpaare $g \neq 0$ ($0 \leq r \leq k_0 - \left\lfloor \frac{k_0}{2} \right\rfloor - 1$), so daß für die Distanzfunktion

$f(g) < M_h$, $M_h \geq \left(\frac{V}{I}\right)^{\frac{1}{n}}$ gilt, so gibt es zu jedem ε_0 mindestens und im allgemeinen auch nur $r + 1$ Gitterpunkte \bar{g} , so daß $f(\bar{g} + \varepsilon_0) \leq M_h$ ist. Die für V angegebene Schranke läßt sich nicht mehr herabdrücken. Hingegen ist der Alternativsatz in allgemeineren Sätzen enthalten. So gilt: Sind K_1 und K_2 konvexe Körper mit dem Mittelpunkt 0 und ist die Summe ihrer Volumina $V_1 + V_2 \geq 2^n k_0$ und enthalten die Körper K_i ($i = 1, 2$) höchstens $k_0 - r_i - 1$ Gitterpunktpaare, so erfüllen die Körper, die aus $K_3 = \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$ durch die Translationen $0 \rightarrow g$ hervorgehen, den R_n mindestens $r + 1$ -fach, wo $r = \left\lfloor \frac{r_1 V_1 + r_2 V_2}{2\sqrt{V_1 V_2}} \right\rfloor$ ist. Ferner kann man die Voraussetzung der

Konvexität aufgeben, denn die Sätze gelten auch für die Menge $M(K)$ aller Punkte der Form $\mathfrak{R}^{-1}(\xi - \eta)$. Dabei sind ξ und η beliebige Punkte aus einer beschränkten, abgeschlossenen, im Jordanschen Sinne meßbaren Menge und \mathfrak{R} eine Diagonalmatrix mit den positiven Elementen k_1, \dots, k_n . Für engere Klassen von Mengen ergeben sich schärfere Sätze. So werden hier sogenannte ω -konvexe Mengen betrachtet. Sie besitzen eine Distanzfunktion, die statt der Dreiecksungleichung die folgende Bedingung erfüllt: Sind k und k_0 beliebige natürliche Zahlen, aber $k > k_0$, so kann man aus k Punkten ξ_1, \dots, ξ_k stets $k_0 + 1$ Punkte $\xi'_0, \dots, \xi'_{k_0}$ so herausgreifen, daß

$f^\sigma(\xi'_0 - \xi'_i) \leq \frac{c}{k - k_0} \sum_{j=1}^k f^\sigma(\xi_j)$ ($i = 1, \dots, k_0$) gilt. Dabei sind σ und c feste, positive Zahlen.

Hofreiter (Wien).

Reichelt, Edith: Über die einfache lückenlose Ausfüllung des n -dimensionalen Raumes durch kongruente Würfel. Wien: Diss. 1943.

Bei einer nicht gitterförmigen Ausfüllung des n -dim. Raumes durch kongruente Würfel braucht nicht jeder Würfel mit einem seiner Nachbarn eine ganze $(n - 1)$ -dim. Seitenfläche gemein zu haben. Nach einer Vermutung Kellers gibt es in jeder einfachen lückenlosen Ausfüllung stets zwei Würfel, die eine ganze Seitenfläche gemein haben (Zwillingspaar). Hier wird diese Vermutung neuerdings für $n \leq 6$ bewiesen. Ferner wird untersucht, ob unter den an einen gegebenen Würfel angrenzenden Würfeln Zwillingspaare vorkommen. O. B. d. A. werde der Nullpunktswürfel gewählt. Werden die rechtwinkligen Koordinaten mit x_1, \dots, x_n bezeichnet, so sollen unter den in der x_ν -Richtung an den Nullpunktswürfel angrenzenden Würfeln die Würfel mit den Mittelpunktskoordinaten $(\alpha_1, \dots, \alpha_{\nu-1}, 1, \alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_n)$ mit $-1 < \alpha_i < 1$ verstanden werden. Dann gelten die folgenden Sätze: Im R_3 gibt es in der Menge der Würfel, die aus dem Nullpunktswürfel und den in einer Richtung angrenzenden Würfeln besteht, stets ein Zwillingspaar. Im R_4 ist dies nicht immer der Fall. Betrachtet man aber einen Würfel und die in zwei Richtungen angrenzenden Würfel, so existiert darunter ein Zwillings-

paar. Im R_5 braucht unter den in vier Richtungen angrenzenden Würfeln kein Zwillingspaar zu existieren, wohl aber gibt es ein Zwillingspaar in der Gesamtheit der an einen gegebenen Würfel angrenzenden Würfel. Hofreiter (Wien).

Analysis.

Allgemeines:

● **Valiron, Georges:** *Théorie des fonctions.* (Cours d'analyse math. 1.) Paris: Masson & Cie. 1942. II, 522 pag. et 78 fig.

Der führende französische Funktionentheoretiker gibt in diesem ersten Band seiner Vorlesungen eine fesselnde Darstellung der Lehre von den reellen und komplexen Funktionen, von einer Spannweite wie sie die beste französische Tradition dieser Cours würdig fortsetzt. Das Werk erfaßt den Studierenden, der die Differential- und Integralrechnung in ihren Hauptpunkten aus dem ersten Studienjahre schon kennt, vertieft diese Kenntnis ebenso an wesentlichen Methoden wie auch an reizvollen Fragestellungen und verschafft Einblicke in das Gesamtgebäude der Höheren Analysis, soweit es die Funktionen an sich einschließt; ein zweiter Band soll dem Flügel der Funktionalgleichungen gewidmet werden. In der Übersicht über die Kapitel verweisen wir auf einige (unmöglich aber alle) Rosinen:

1. Zahlen, Mengen, Grenzbegriff (Liouvillesche Zahlen, Annäherung durch Kettenbrüche; Hilbertsche Kurve). 2. Unendliche Reihen und Produkte (auch mehrfache Reihen; Lösung der Funktionalgleichung $S(kz) = kzS(z)$, die für die spätere Behandlung der elliptischen Funktionen herangezogen wird). 3. Stetige Funktionen (darin auch Analytisches über algebraische Gleichungen; Klassen von Funktionen einer Veränderlichen. Beschränkte Variation; Konvexität). 4./5. Riemannsches Integral und Verallgemeinerungen: Stieltjes, Lebesgue (darin Transzendenz von e, π nach Hurwitz). 6. Darstellung durch Reihen oder bestimmte Integrale [Gleichm. Konvergenz; Fresnelintegrale, Dirichletreihen, $\Gamma(x)$]. 7. Trigonometrische Reihen. 8. Praxis der Integration (elliptische und hyperelliptische, Abelsche Integrale; Polynome von Legendre und Bernoulli; Eulersche Summenformel; Interpolation und mechanische Quadratur). 9. Funktionen mehrerer Veränderlichen (Funktionaldeterminanten; Extrema; Berührungstransformationen). 10./11. Mehrfache Integrale. 12. Elementare Funktionen einer komplexen Veränderlichen (bis zu Riemannschen Flächen). 13. Cauchysche Integrale; Residuen; Anwendung auf bestimmte Integrale. 14. Weierstraßsche Theorie (Analytische Fortsetzung; Perioden durch Pole und bei elliptischen und hyperelliptischen Integralen; Grundlagen der Theorie der ganzen Funktionen; Poisson-Jensen-Nevanlinnasche Integralformeln, Produkte, Wachstum). 15. Konforme Abbildung. Riemannscher Abbildungssatz; Polygone und Kreisbogenpolygone; Dreiecksfunktionen; Picardscher Ideenkreis. 16. Elliptische Funktionen (vgl. 2). 17. Funktionen, die durch Integrale definiert sind: Gammafunktion, $E_\alpha(z)$, Phragmén-Lindelöfsche Sätze. Analytische Fortsetzung nach Borel und Mittag-Leffler; Zetafunktion; Beweis des Primzahlsatzes. Ulrich (Gießen).

● **Prange, Georg:** *Vorlesungen über Integral- und Differentialrechnung. Bd. 1: Funktionen einer reellen Veränderlichen.* Hrsg. v. Werner v. Koppenfels. Berlin: Springer 1943. XI, 436 S. u. 140 Abb. RM. 21.—.

Daß die durch das pädagogische Geschick des leider zu früh verstorbenen Verf. berühmten Vorlesungen einem breiteren Publikum zugänglich gemacht werden, ist um so mehr zu begrüßen, als sie nach Aufbau und Methodik einen höchst persönlichen Stempel tragen und in ganz besonderem Maße geeignet sind, die Kluft zwischen Schule und Technischer Hochschule zu überbrücken. Verf. stellt betont den Charakter der Mathematik als Hilfsmittel zur Beherrschung der Naturerscheinungen heraus; daher wachsen bei ihm die mathematischen Überlegungen immer aus bestimmten Fragestellungen technischer oder physikalischer Natur heraus, und die Bedeutung der allgemeinen Ergebnisse wird durch zahlreiche Anwendungen veranschaulicht und belegt, so daß der Leser zu einer sinnvollen Verwendung der höheren Mathematik in der Technik erzogen wird. Wenn so den Anwendungen breiter Raum gewidmet ist und jeder schwierigere Gedankengang durch originelle Figuren plastische Form gewinnt, so genügt das Buch doch — im Gegensatz zu vielen anderen Werken mit gleichem Ziel — allen Anforderungen zu mathematischer Strenge. Die Gedankenlinie stimmt — man stellt dies mit einiger Überraschung fest — weitgehend mit dem geschichtlichen Werdegang der Begriffe überein, was übrigens durch zahlreiche interessante historische Bemerkungen, die den Text beleben, belegt wird; demnach erfolgt auch die endgültige Festlegung eines Begriffes und gar sein Aufgehen im verblassenden Kalkül erst dann, wenn sein Wesen und seine Handhabung dem Leser längst vertraut sind; dieser lernt z. B. mühelos mit Integralen umgehen

und kompliziertere Flächen- und Inhaltsbestimmungen ausführen, ohne daß vom allgemeinen Integralbegriff die Rede war. — In zwei großen Grundkapiteln werden die Grundbegriffe geformt; das erste behandelt die ganzen rationalen Funktionen, ausgehend von der Flächeninhaltsaufgabe und ihrer Lösung durch das Schachtelungsverfahren, wobei gleich die allgemeine Bedeutung des letzteren erörtert wird; die Tangentenaufgabe führt zur Ableitung. Charakteristisch für das Vorgehen des Verf. ist es z. B., wie bei der Parabel 3. Grades der Fundamentalsatz über den Zusammenhang von Inhalts- und Tangentenaufgabe auf Grund der Berechnung des Einspannmomentes eines Balkens abgeleitet und dieser Gedanke gleich zur Bestimmung komplizierter Trägheitsmomente herangezogen wird. Es folgt im gleichen Funktionsbereich der Taylorsche Satz samt Horner Schema; anschließend das Nötige über Gleichungswurzeln und ihre numerische Berechnung, die Interpolationsformeln mit mühelosem Übergang zur Differenzenrechnung und der Lösung von Differenzengleichungen, für die die Hängebrücke als Beispiel dient. Ein Anhang bringt die exakten allgemeinen Prägnanzen der Lehre vom Grenzwert und Flächeninhalt. Das zweite Kapitel schreitet nun zu den gebrochenen rationalen Funktionen fort und führt durch deren Integration neue Funktionen ein: Logarithmus und Exponentialfunktion und durch Integration von $(1+x^2)^{-1}$ den \arctang (ohne daß vorher von trigonometrischen Funktionen die Rede ist); eine sehr elegante Überlegung am letztgenannten Integral führt direkt aus seiner Inhaltsdefinition zur geometrischen Deutung am Kreis. Diese Funktionen geben auch Anlaß zur unmerklichen Einführung in die Reihenlehre, wobei Verf. mit Recht auf der Mitnahme des „Restes“ besteht. Am Beispiel der Integration von $2x(1+x^2)^{-1}$ wird an der endlichen Rechteckssumme in plastischer Weise die Substitutionsregel erläutert; diese Behandlung führt in ungezwungener Weise zu Begriff und Handhabung des Differentials. — Erst jetzt, nachdem alle wesentlichen Bausteine der Infinitesimalrechnung gewonnen sind, mündet die Darstellung in den eigentlichen Kalkül aus und folgt, bis auf die anregenden Beispiele, gewohnten Gedankengänge. — Kapitel 3 bringt den Kalkül der Differential- und Integralrechnung samt Taylorscher Formel, Kapitel 4 die einfachsten irrationalen Funktionen und ihre Integrale (hier wird analog zum \arctang erst aus dem Integral \arcsin und ArSin definiert und durch Umkehrung zu den trigonometrischen Funktionen übergegangen) und das Schlußkapitel 5 die Grundzüge der Lehre von den Fourierschen Reihen. — Der zweite Band wird die Funktionen mehrerer Veränderlicher und die Elemente der Kurventheorie enthalten.

Harald Geppert (Berlin).

● Rothe †, Rudolf: Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure.

Tl. 4: Übungsaufgaben mit Lösungen. Formelsammlung. H. 7. Zusammenstellung der Formeln und Lehrsätze. Unter Mitwirkung von Oskar Degosang u. Gerhard Dobbrack. (Teubners math. Leitfäden Bd. 43.) Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1943. VI, 120 S. u. 74 Abb. RM. 4.—.

Die bereits angekündigte Formelsammlung zu Rothes Darstellung (vgl. dies. Zbl. 21, 305) liegt nunmehr vor. Sie enthält, in 12 größere und 89 kleinere Abschnitte unterteilt, die Formeln und die Ergebnisse, die im Hauptwerk vorkommen, ohne Beweise anzuführen, zusammengestellt. Auf die Abschnitte des Hauptwerks ist verwiesen, doch ist die Darstellung mit Sorgfalt so ausgeführt, daß die Formelsammlung auch für sich allein verwendet werden kann. Ein reichhaltiges Stichwortverzeichnis von 7 Seiten macht den Schluß.

L. Schrutka (Wien).

Differentiation und Integration reeller Funktionen:

Nef, Walter: Über die Stieltjesschen Integrale. Comment. math. helv. 16, 29—36 (1943).

D'après F. Riesz [Ann. Ecole norm., III. s. 31, 9—14 (1914)], à toute fonctionnelle linéaire $A(f(x))$ de fonction $f(x)$ continue dans un intervalle fermé $a \leq x \leq b$, on peut faire correspondre une fonction $\alpha(x)$ à variation bornée telle que $A(f(x)) = \int_a^b f(x) d[\alpha(x)]$

pour toute f . L'aut. démontre qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux fonctions α correspondent à la même fonctionnelle A est que ces fonctions aient, à une constante additive près, la même fonction limite d'un côté [par exemple $\tilde{\alpha}(x+0) = \alpha(x)$ pour $x = a$ et b , $\tilde{\alpha}(x+0) = \alpha(x+0)$ pour $a < x < b$], auquel cas il y en a de même de l'autre côté.

Frédéric Roger (Freiburg i. B.).

Jacobsthal, Ernst: Über den Mittelwertsatz der Integralrechnung. Norske Vid. Selsk., Forh. 13, 27—29 (1941).

Für in $[a, b]$ stetiges $f(x)$ und für integrierbare und nichtnegative $p(x)$ gilt

$\int_a^b f(x)p(x)dx = f(\xi)\int_a^b p(x)dx$, wobei ξ eine Stelle des offenen Intervalls (a, b) ist.

Die Stetigkeit von $p(x)$ braucht nicht vorausgesetzt zu werden. Vgl. den später erschienenen, von G. Größ (s. dies. Zbl. 27, 391) gegebenen Beweis desselben Satzes.

G. Hajós (Budapest).

Groot, J. de: Über die Fortsetzung differenzierbarer Funktionen. *Mathematica, Zutphen B* 12, 15—24 (1943).

Es wird folgender Satz bewiesen: Jede auf einer (beschränkten) abgeschlossenen Teilmenge \mathfrak{M} der reellen Zahlgeraden \mathfrak{R}_1 definierte, stetige und differenzierbare Funktion $f(x)$ kann stetig und differenzierbar auf die ganze \mathfrak{R}_1 fortgesetzt werden. (Für $f'(x)$ auf \mathfrak{M} sind die Werte $\pm \infty$ zugelassen.) Bisher war die Gültigkeit dieses Satzes bewiesen nur unter der Voraussetzung höchstens abzählbar vieler Unstetigkeiten von $f'(x)$ auf der Begrenzung von \mathfrak{M} und für endliches $f'(x)$ (vgl. K. Seebach, dies. Zbl. 21 116; für reelle Funktionen von mehreren reellen Veränderlichen vgl. H. Whitney, dies. Zbl. 15, 10, sowie frühere Arbeiten von Whitney). An einem Beispiel wird gezeigt, daß nicht jede, auf einer (geeignet gewählten) abgeschlossenen Menge \mathfrak{M} stetig differenzierbare $f(x)$ stetig differenzierbar auf \mathfrak{R}_1 fortgesetzt werden kann. — Schließlich bemerkt Verf., daß mit Hilfe seiner Beweismethode die Gültigkeit des Satzes sich auch ergibt, wenn \mathfrak{R}_1 ersetzt wird z. B. durch den p -adischen Körper (d. h. durch denjenigen Körper, welcher aus dem Körper der rationalen Zahlen durch p -adische Bewertung und Vervollständigung erhalten wird). (Anmerk. d. Ref.: Nach Mitteilung von Herrn W. Brödd ist er für den Fall der Funktionen von mehr als einer Veränderlichen im Besitze von Ergebnissen, welche über diejenigen von H. Whitney hinausgehen; auch besitzt er einen einfacheren Beweis des Satzes des Verf. Eine diesbezügliche Mitteilung wird im J. reine angew. Math. erscheinen.) *Haupt.*

Pompeiu, D.: Formes diverses du théorème des accroissement finis. *Bul. Politehn., București* 13, 23—25 (1942).

Wendet man den Mittelwertsatz, statt auf $f(x)$, auf eine Funktion von $f(x)$ an, so kann man ihm mannigfache Formen geben, z. B.

$$\begin{aligned} f(b)/f(a) &= \exp \{ (b-a)f'(\xi)/f(\xi) \}; \quad \{ f(b) - f(a) \} / \{ 1 + f(a)f(b) \} \\ &= \tanh [(b-a)f'(\xi) / \{ 1 + f^2(\xi) \}], \quad a < \xi < b. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt unmittelbar $\exp\left(1 - \frac{a}{b}\right) < \frac{b}{a}$ für $0 < a < b$.

Harald Geppert (Berlin).

Jacobsthal, Ernst: Über die eindeutige Abbildung zweier Bereiche auf einander bei nichtverschwindender Funktionaldeterminante. *Norske Vid. Selsk., Forh.* 13, 123—126 (1941).

Es sei $\Phi: x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ eine eindeutige stetige Abbildung mit stetigen ersten Ableitungen in einem ebenen beschränkten abgeschlossenen Gebiet A . Ein Bildpunkt $\Phi(P)$ mit einem einzigen Urbildpunkt $P \in A$ heißt ein einfacher Punkt, im anderen Fall ein Doppelpunkt. Voraussetzungen: 1. Die Funktionaldeterminante $J(P)$ ist $\neq 0$ für jeden inneren Punkt P . 2. Ein Bildpunkt eines jeden Randpunktes ist ein Randpunkt. Behauptung: Entweder jeder oder kein einziger innerer Bildpunkt ist ein einfacher Punkt. Gibt es einen einfachen Randpunkt $Q = \Phi(P)$ mit $J(P) \neq 0$, so tritt die erste Möglichkeit ein. Daraus folgt: ist $J(P) \neq 0$ für jeden $P \in A$, so ist die Abbildung Φ bei doppelpunktfreiem Rande schlicht. *J. Novák (Brünn).*

Cesari, Lamberto: Sulle trasformazioni continue. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. s. 21, 157—188 (1942).

Une transformation plane $\Phi: x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $(u, v) \in A(0,1; 0,1)$ est dite à variation bornée (resp. absolument continue) au sens de Banach [*Fundam. Math.* 7, 225—236 (1925)] si, pour tout système de carrés $[q_i]$ de A , de côtés parallèles aux axes et sans points intérieurs communs, il existe une constante M telle que

$\sum_{i=1}^{\infty} |\Phi(q_i)| \leq M$ (resp. à tout $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre $\delta > 0$ tel que $\sum_{i=1}^{\infty} |q_i| < \delta$ entraîne $\sum_{i=1}^{\infty} |\Phi(q_i)| < \varepsilon$); de même au sens de Vitali [Fundam. Math. 8, 175—188

(1926)]. Une fonction $f(u, v)$ définie dans le carré $A(0, 1; 0, 1)$ est dite à variation bornée (resp. absolument continue) au sens de Tonelli [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 3, 357—362 et 633—638 (1926)] si la variation totale $V_v(\bar{u})$ de la fonction $f(\bar{u}, v)$ de la seule variable $v(0 \leq v \leq 1)$ et de même $V_u(\bar{v})$ sont presque partout finies et intégrables dans $(0, 1)$ au sens de Lebesgue [resp. si f est à variation bornée dans A et si, pour presque toute valeur \bar{u} et \bar{v} de $(0, 1)$, les fonctions $f(\bar{u}, v)$ et $f(u, \bar{v})$ sont absolument continues dans $(0, 1)$ par rapport à la seule variable v ou u]. L'aut. dit d'une transformation Φ qu'elle est de classe \mathfrak{L}_p si les fonctions $x(u, v)$ et $y(u, v)$ sont absolument continues au sens de Tonelli dans A et si leurs dérivées partielles x_u, x_v, y_u, y_v sont intégrables $L_p(p \geq 1)$; et démontre que toute transformation plane de classe $\mathfrak{L}_{2+\alpha}$ avec $\alpha > 0$ est à variation bornée et absolument continue au sens de Banach et Vitali. Par contre, il donne des exemples effectifs de transformation de classe \mathfrak{L}_1 , l'une non absolument continue, l'autre à variation non bornée, en ce même sens; également pour la classe \mathfrak{L}_2 ; et même, dans ce dernier cas, des exemples de transformation non dégénérée (c'est-à-dire dans laquelle l'image inverse d'un point ne contient pas de continu ayant plus d'un point). *Frédéric Roger* (Freiburg i. B.).

Popoviciu, Tiberiu: Notes sur les généralisations des fonctions convexes d'ordre supérieur. 4. Disquisit. Math. et Phys., București 2, 127—158 (1942).

Eine reelle Funktion $f(x)$, deren Definitionsbereich eine lineare Menge E ist, heißt abschnittsweise monoton, wenn es eine endliche Zerlegung $E = \sum_1^m E_i$ mit $E_i < E_{i+1}$

für $i = 1, 2, \dots, m-1$ derart gibt, daß $f(x)$ auf jeder Teilmenge E_i monoton ist. Zwischen verschiedenen derartigen Zerlegungen gibt es eine kanonische Zerlegung

$E = \sum_1^h E_i^*$ mit der kleinsten Gliederanzahl h —der sog. Charakteristik von $f(x)$. Es

bedeute $a_i = \inf E_i^*$, $b_i = \sup E_i^*$ und $c_{2i} = f(a_i)$ oder $= \lim_{x \rightarrow a_i} f(x)$, je nachdem der Punkt a_i zu E_i^* gehört oder nicht; ähnlich sei $c_{2i+1} = f(b_i)$ oder $= \lim_{x \rightarrow b_i} f(x)$. Ist k

die Anzahl der Zeichenwechsel in der Folge $c_2 - c_1, c_3 - c_2, \dots, c_{2h} - c_{2h-1}$, so heißt $f(x)$ von der Ordnung $(0|k)$. Es ist $h-1 \leq k \leq 2h-2$. Die Aufgabe der vorliegenden Arbeit ist, den folgenden Satz zu beweisen: Jede beschränkte und abschnittsweise monotone Funktion $f(x)$ von der Ordnung $(0|k)$ läßt sich in der Form $f(x) = P(\varphi(x))$ darstellen, wo P ein Polynom vom Grade $k+1$ und $\varphi(x)$ eine auf E nicht fallende Funktion ist. Wenn $f(x)$ stetig ist so kann man auch die Stetigkeit von $\varphi(x)$ fordern.

J. Novák (Brünn).

Allgemeine Reihenlehre:

Claudian, Virgil: Einige neue Betrachtungen über die Kriterien erster und zweiter Art für die Reihen mit positiven Gliedern. Bul. Politehn., București 13, 31—41 (1942).

Es sei Σa_n eine unendliche Reihe mit positiven Gliedern und $\log_1 x = \log x$, $\log_2 x = \log \log x, \dots$; $\lambda_{-1}(x) = 1$; $\lambda_0(x) = \log_0 x = x$; $\lambda_p(x) = x \log_1 x \cdots \log_p x$ für $lp = 1, 2, \dots$ gesetzt. Verf. untersucht die in den Vergleichskriterien II. Art auftretenden Ausdrücke

$$x_n = \lambda_{p+1}(n) \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{\lambda_1(n)} - \cdots - \frac{1}{\lambda_p(n)} \right)$$

und zeigt: Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ ist, so ist auch $-\lim_{n \rightarrow \infty} [\log(a_n \lambda_p(n))] / \log_{p+2} n = l$ ($p = -1, 0, 1, 2, \dots$), oder $1/a_n = n \log n \log_p n (\log_{p+1} n)^{l-\mu_n}$ mit $\mu_n \rightarrow 0$ [vgl. auch P. Montel, Nouv. Ann. Math., IV. s. 12, 80—93 (1912)]. *Meyer-König* (Stuttgart).

Good, I. J.: Some relations between certain methods of summation of infinite series. Proc. Cambridge Philos. Soc. **38**, 144—165 (1942).

Es sei $f(t)$ eine in $t > 0$ definierte, meßbare Funktion, die mit nichtverschwindenden Momenten $c_n = \int_0^\infty f(t)t^n dt$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) versehen ist. (\int_0^∞ ist dabei hier wie auch weiterhin stets im Cauchy-Lebesgueschen Sinne \int_0^∞ aufzufassen.) Eine Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n$ heißt nach dem zu $f(t)$ gehörigen Momentenverfahren (kurz „ f -Verfahren“) zur Summe S summierbar, wenn

$$(*) \quad \int_0^\infty f(t) \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n t^n}{c_n} dt = S$$

gilt (vgl. T. J. I'A. Bromwich, Theory of infinite series (1908), § 118). Dies setzt voraus, daß das Verfahren auf $\sum_{n=0}^\infty a_n$ anwendbar ist, d. h. daß $F(t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n t^n}{c_n}$ für alle in (*) eingehenden Werte t konvergiert und somit (wenn nicht $f(t)$ für hinreichend große t äquivalent 0 ist) eine ganze Funktion darstellt, was auf $|a_n|^{\frac{1}{n}} = o(|c_n|^{\frac{1}{n}})$ hinauskommt. Gilt dann überdies (*), so heißt das Verfahren für $\sum_{n=0}^\infty a_n$ wirksam. Von

zwei Verfahren f und g heißt f ebenso häufig anwendbar wie g , wenn f auf jede Reihe anwendbar ist, auf die g anwendbar ist. Ist dabei f auf mindestens eine Reihe anwendbar, auf die g nicht anwendbar ist, so heißt genauer f häufiger anwendbar als g , andernfalls heißen f und g gleich häufig anwendbar. — Die Erfahrung zeigt oft die Richtigkeit des folgenden, von Hardy und Littlewood allgemein ausgesprochenen Prinzips: Ist f häufiger anwendbar als g , so folgt aus der Anwendbarkeit von g und der Wirksamkeit von f für eine Reihe stets auch die Wirksamkeit von g für diese Reihe. Den Hauptgegenstand der vorliegenden Arbeit bildet der Nachweis, daß dieses Prinzip für die „verallgemeinerten Borel-Mittag-Lefflerschen Verfahren“, d. h. für die zu den Funktionen $f(t) = ce^{-t^c} t^\gamma$ ($c > 0$, $\gamma > -1$) gehörigen Momentenverfahren, gilt. Verf. zeigt nämlich: Ist $f(t) = ce^{-t^c} t^\gamma$, $g(t) = de^{-t^d} t^\delta$ mit $d \geq c > 0$, $\delta \geq \gamma > -1$ und ist für eine Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n$ das g -Verfahren anwendbar (was auf $|a_n|^{\frac{1}{n}} = o\left(n^{\frac{1}{d}}\right)$ hinauskommt), das f -Verfahren wirksam, so ist auch g wirksam und liefert dieselbe Summe wie f . Als Spezialfall ist darin ein von G. H. Hardy (J. London math. Soc. **9**, 153—157 (1934); dies. Zbl. **9**, 108) für die zu den Funktionen

$f(t) = \frac{1}{\alpha} e^{-t^\alpha} t^{\frac{1}{\alpha}-1}$ ($\alpha > 0$) gehörigen „Borel-Mittag-Lefflerschen (B, α) -Verfahren“ ausgesprochener, jedoch nur für Sonderfälle bewiesener Satz enthalten. — Verf. gibt ein Beispiel dafür, daß sein Satz für $c = d$ (was gleich häufige Anwendbarkeit von f und g besagt) bei Weglassung der Bedingung $\delta > \gamma$ falsch wird. Er zeigt dann, daß man sich bei geeigneten Festsetzungen von der Voraussetzung $\gamma > -1$ befreien kann. Im Anschluß daran zeigt er endlich, daß sich sein Satz als erhebliche Verallgemeinerung der Tatsache auffassen läßt, daß bei den verallgemeinerten Borel-Mittag-Lefflerschen Verfahren am Reihenanfang endlich viele Glieder zugefügt werden dürfen (was selbst wieder die Verallgemeinerung einer bekannten Eigenschaft des Borelschen Verfahrens darstellt). — Als weiterer Satz wird bewiesen: Ist $\sum_{n=0}^\infty a_n$ nach allen Borel-Mittag-Lefflerschen (B, α) -Verfahren summierbar zur Summe S , so ist sie auch nach dem durch $\lim_{\delta \rightarrow +0} \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{\Gamma(1+\delta n)}$ erklärten Mittag-Lefflerschen Verfahren summierbar zur Summe S . Dieser Satz läßt sich so wenden, daß er ebenfalls als Beispiel zu dem genannten Hardy-Littlewoodschen Prinzip erscheint. F. Lösch (Rostock).

Scott, W. T., and H. S. Wall: The transformation of series and sequences. Trans. Amer. Math. Soc. 51, 255—279 (1942).

Die vorliegende Arbeit zerfällt in drei nur lose miteinander zusammenhängende Teile:

(I) Der erste Teil behandelt lineare Mannigfaltigkeiten von Hausdorffschen Mitteln. Bedeutet (c_p) eine Momentenfolge, ist also

$$c_p = \int_0^1 u^p d\Phi(u) \quad (p = 0, 1, 2, \dots)$$

mit einer in $0 \leq u \leq 1$ schwankungsbeschränkten (reellen oder komplexen) Funktion $\Phi(u)$, so werden die zugehörigen Hausdorffschen Mittel einer Reihe $\sum_{p=0}^{\infty} u_p$ definiert durch

$$U_n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \Delta^{n-p} c_p \cdot (u_0 + u_1 + \dots + u_p) \quad \text{mit} \quad \Delta^i c_j = c_j - \binom{i}{1} c_{j+1} + \binom{i}{2} c_{j+2} - \dots$$

($n = 0, 1, 2, \dots$). Die Reihe $\sum_{p=0}^{\infty} u_p$ heißt $[H, \Phi(u)]$ - oder $[H, c_p]$ -summierbar zur

Summe s , wenn $U_n \rightarrow s$ für $n \rightarrow \infty$ gilt. $[H, \Phi(u)]$ ist dann und nur dann ein reguläres Verfahren, wenn $\Phi(u)$ in $u = 0$ stetig und $\Phi(1) - \Phi(0) = 1$ ist. $[H, \Phi(u)]$ wird als ein „wesentlich reguläres“ Verfahren bezeichnet, wenn $\Phi(u)$ in $u = 0$ stetig ist; ist dabei $\Phi(1) - \Phi(0) = c_0 \neq 0$, so ist $[H, \Phi(u)/c_0]$ regulär. — (1) Die Verff. stellen sich zunächst die Aufgabe, diejenigen in $\langle 0, 1 \rangle$ definierten Funktionenfolgen $\{\beta_p(u)\}$ zu charakterisieren, mit denen

$$c_p = \int_0^1 \beta_p(u) d\Phi(u) \quad (p = 0, 1, 2, \dots)$$

für jede in $\langle 0, 1 \rangle$ schwankungsbeschränkte (reelle oder komplexe) Funktion $\Phi(u)$ eine Momentenfolge darstellt. Die aus einer solchen Folge $\{\beta_p(u)\}$ entspringenden Mittelbildungen $[H, c_p]$ werden als „(lineare) Mannigfaltigkeit“ $M[\beta_p(u)]$ von Mittelbildungen und $\{\beta_p(u)\}$ als „Basis“ der Mannigfaltigkeit bezeichnet. Notwendige Bedingungen dafür, daß $\{\beta_p(u)\}$ die Basis einer Mannigfaltigkeit $M[\beta_p(u)]$ darstellt, lauten: (a) $\beta_p(u)$ ist in $\langle 0, 1 \rangle$ stetig; (b) $\{\beta_p(u)\}$ ist für jedes feste u aus $\langle 0, 1 \rangle$ eine Momentenfolge. Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, so lautet eine hinreichende Bedingung dafür, daß

$\{\beta_p(u)\}$ eine Basis darstellt: $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} |\Delta^{n-p} \beta_p(u)| < M$ (wo M eine von n und u unabhängige Schranke bedeutet). Diese Bedingung ist insbesondere erfüllt, wenn $\{\beta_p(u)\}$ für jedes u aus $\langle 0, 1 \rangle$ eine totalmonotone Folge darstellt; $\{\beta_p(u)\}$ heißt dann eine „totalmonotone Basis“. Eine andere hinreichende Bedingung dafür, daß $\{\beta_p(u)\}$ eine Basis darstellt, besteht darin, daß die $\beta_p(u)$ in $\langle 0, 1 \rangle$ stetige Funktionen sind, die sich

in der Form $\beta_p(u) = \int_0^1 t^p d_t B(u, t)$, ($p = 0, 1, 2, \dots$), darstellen lassen, wo $B(u, t)$

eine reelle Funktion bedeutet, die bzgl. t in $0 \leq t \leq 1$ schwankungsbeschränkt ist, und zwar gleichmäßig für alle u aus $0 \leq u \leq 1$. — (2) Weiter handelt es sich darum, diejenigen Folgen $\{\beta_p(u)\}$ zu charakterisieren, die die Basis einer „regulären Mannigfaltigkeit“ $M[\beta_p(u)]$ von Hausdorffschen Mitteln darstellen, in dem Sinne, daß $M[\beta_p(u)]$ wenigstens ein reguläres Mittel enthält und jedes in $M[\beta_p(u)]$ enthaltene Mittel wesentlich regulär ist. Dazu wird gezeigt: (a) Ist $\{\beta_p(u)\}$ eine totalmonotone Basis, so ist $M[\beta_p(u)]$ dann und nur dann regulär, wenn $\beta_0(u) \neq 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^n \beta_0(u) = 0$ ($0 \leq u \leq 1$) gilt. (b) Es sei $\{\beta_p(u)\}$ mit $\beta_0(u) \neq 0$ eine Basis, die sich mit einer für jedes u aus $0 \leq u \leq 1$ bzgl. t in $0 \leq t \leq 1$ schwankungsbeschränkten Funktion $B(u, t)$

in der Form $\beta_p(u) = \int_0^1 t^p d_t B(u, t)$, ($p = 0, 1, 2, \dots$), darstellen läßt. Gilt dann $|B(u, t)| < K$ in $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$ (wo K eine von u, t unabhängige Schranke

bedeutet), ferner $\lim_{t \rightarrow +0} B(u, t) = B(u, 0) = 0$ gleichmäßig in $0 \leq u \leq 1$, so ist $M[\beta_p(u)]$ eine reguläre Mannigfaltigkeit. — Schließlich wird zu den Fragen (1) und (2) noch der folgende Vergleichssatz bewiesen: Es sei $\{\beta_p(u)\}$ eine Folge in $0 \leq u \leq 1$ stetiger reeller Funktionen mit $\beta_0(u) \neq 0$. Existiert dann eine totalmonotone Basis $\{II_p(u)\}$ derart, daß $\Delta^m \beta_p(u) \leq \Delta^m II_p(u)$ in $0 \leq u \leq 1$ für $m, p = 0, 1, 2, \dots$ ausfällt, so ist $\{\beta_p(u)\}$ eine Basis. Überdies ist $M[\beta_p(u)]$ regulär, wenn $M[II_p(u)]$ regulär ist und $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^n \beta_0(u) = 0$

für $0 \leq u \leq 1$ gilt. — (3) Sodann wird die Frage erörtert, wann eine reguläre Mannigfaltigkeit $M[\beta_p(u)]$ ein vorgegebenes reguläres Verfahren $[H, b_p]$ in dem Sinne umfaßt, daß jede $[H, b_p]$ -summierbare Reihe auch von jedem in $M[\beta_p(u)]$ enthaltenen regulären Mittel summiert wird. Ist $b_p \neq 0$ ($p = 0, 1, 2, \dots$), so trifft dies dann und nur dann zu, wenn $\{\beta_p(u)/b_p\}$ die Basis einer regulären Mannigfaltigkeit ist. — (4) Es folgen noch Anwendungen und Beispiele. Insbesondere wird die zu der totalmonotonen Basis $\beta_p(u) = (1 + pu)^{-1}$ gehörige reguläre Mannigfaltigkeit $M[(1 + pu)^{-1}]$ unter verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet. Von den Ergebnissen sei hervorgehoben, daß es gelingt, aus dieser Mannigfaltigkeit unendliche Klassen von Mittelbildungen herauszuheben, die alle einer gegebenen Mittelbildung äquivalent sind oder von einer solchen umfaßt werden. Betrachtet man nur diejenigen Mittelbildungen $[H, c_p]$ aus $M[(1 + pu)^{-1}]$, die zu einer nicht-abnehmenden Funktion $\Phi(u)$ mit $\Phi(1) - \Phi(0) = 1$ gehören, so gilt

stets $(C, 0) < [H, c_p] < (C, 1)$; dabei ist genau dann $[H, c_p] \approx (C, 1)$, wenn $\int_0^1 d\Phi(u)/u$ konvergiert, und es ist genau dann $[H, c_p] \approx (C, 0)$, d. h. der Konvergenz, wenn $\Phi(u)$ in $u = 1$ unstetig ist.

(II) Der zweite Teil der Arbeit befaßt sich mit dem Gronwall'schen Summierungsverfahren (vgl. T. H. Gronwall, dies. Zbl. 3, 55). Dieses Verfahren verwendet eine „Abbildungsfunktion“ $z = f(w)$ und eine „Gewichtsfunktion“

$g(w) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p w^p$ ($b_p \neq 0$). Dabei soll $z = f(w)$ in $|w| \leq 1$, ausgenommen höchstens die

Stelle $w = 1$, regulär sein und $|w| < 1$ umkehrbar eindeutig auf ein in $|z| < 1$ gelegenes Gebiet D abbilden, wobei sich $w = 0$ und $z = 0$ sowie $w = 1$ und $z = 1$ entsprechen; die Umkehrfunktion $f^{-1}(z)$ soll auf dem Rand von D regulär sein, abgesehen höchstens von $z = 1$, und hier soll $1 - w = (1 - z)^\lambda [a_0 + a_1(1 - z) + \dots]$ mit $\lambda \geq 1$, $a_0 > 0$ gelten. Die Gewichtsfunktion $g(w)$ soll von der Form $(1 - w)^{-\alpha} + \gamma(w)$ sein, wo $\gamma(w)$ in $|w| \leq 1$ regulär und $\alpha > 0$ ist; ferner soll $g(w) \neq 0$ für $|w| < 1$ sein. Liegt

dann eine Reihe $\sum_{p=0}^{\infty} u_p$ vor, so wird ihre n -te „ (f, g) -Summe“ U_n aus der Potenzreihenidentität

$$\sum_{p=0}^{\infty} u_p [f(w)]^p = [g(w)]^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n U_n w^n$$

bestimmt. Die Reihe $\sum_{p=0}^{\infty} u_p$ heißt „ (f, g) -summierbar“ zur Summe s , wenn $U_n \rightarrow s$ für

$n \rightarrow \infty$ gilt. — (1) Die Hauptaufgabe, die sich die Verff. gestellt haben, ist die Bestimmung aller regulären Summierungsverfahren, die zugleich der Klasse der Hausdorff'schen und der Klasse der Gronwall'schen Verfahren angehören. Es zeigt sich, daß dies genau diejenigen $[H, c_n]$ -Verfahren sind, welche zu Momentenfolgen der Form

$$c_n = \beta^n / \binom{n + \alpha}{n} = \int_0^1 u^n d\Phi(u) \quad \text{mit} \quad \Phi(u) = \begin{cases} 1 - (1 - u\beta^{-1})^\alpha & \text{für } u \leq \beta \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ 1 & \text{für } u > \beta \quad (\alpha \geq 0, 0 < \beta \leq 1) \end{cases}$$

gehören. Das zu einem solchen $[H, c_n]$ -Verfahren äquivalente (f, g) -Verfahren gehört zu den Funktionen

$$f(w) = \frac{\beta w}{1 - (1 - \beta)^w}, \quad g(w) = (1 - w)^{-\alpha-1}.$$

— (2) Weiter wird gezeigt, daß das kürzlich von W. A. Mersman (dies. Zbl. 19, 340) eingeführte Summierungsverfahren, das auf der Mittelbildung

$$U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{n-p} (u_0 + u_1 + \cdots + u_p) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

beruht, übereinstimmt mit dem zu den Funktionen

$$f(w) = \frac{1 - (1-w)^{1/2}}{1 + (1-w)^{1/2}}, \quad g(w) = (1-w)^{-1}$$

gehörigen (f, g) -Verfahren.

(III) Im dritten Teil der Arbeit wird schließlich ein aus einem Schurschen Algorithmus hervorgehendes Summierungsverfahren entwickelt. Aus diesem Algorithmus [vgl. I. Schur, J. reine angew. Math. 147, 205—232 (1916) und 148, 122—145 (1917)] fließt zunächst der folgende von H. S. Wall (dies. Zbl. 27, 304) herrührende Satz: Es sei E die Klasse der in $|x| < 1$ analytischen Funktionen $e(x)$, die daselbst vom Betrage $|e(x)| \leq 1$ sind und für reelle x reelle Werte annehmen. Dann existiert zu $e(x) \in E$ stets eine Funktion $F(z)$ der Form

$$(\alpha) \quad F(z) = \int_0^1 \frac{d\Phi(u)}{1+zu} \quad (\Phi(u) \text{ in } 0 \leq u \leq 1 \text{ beschränkt und nicht-abnehmend})$$

mit $|F(z)| \leq 1$ für $|z| < 1$ derart, daß in $|x| < 1$

$$(\beta) \quad F(z) = \frac{1}{2}(1-x) \frac{1-e(x)}{1+xe(x)} \quad \text{mit} \quad z = \frac{4x}{(1-x)^2}$$

gilt. Umgekehrt gibt es zu jeder Funktion $F(z)$ der Form (α) mit $|F(z)| \leq 1$ in $|z| < 1$ auch stets eine Funktion $e(x) \in E$, so daß (β) besteht. — (1) Geht man daran anknüpfend in (β) mit Ansätzen

$$(\gamma) \quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (-z)^n, \quad \frac{1-e(x)}{1+xe(x)} = \sum_{p=0}^{\infty} c_p (-x)^p$$

ein und behandelt die entstehende Gleichung als Potenzreihenidentität in x , so ergibt sich durch Koeffizientenvergleichung eine Transformation der Form

$$(\delta) \quad C_n = \sum_{p=0}^n T_{n,p} c_p \quad \text{mit} \quad T_{n,p} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \frac{2p+1}{n+p+1} \binom{2n}{n-p} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Über diese Transformation wird zunächst gezeigt: (a) Die Folge $\{c_n\}$ entspringt genau dann gemäß (γ) aus einer Funktion $e(x) \in E$, wenn die durch die Transformation (δ) aus ihr hervorgehende Folge $\{C_n\}$ totalmonoton ist und eine Summe $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \leq 1$ besitzt.

(b) Ist $\{c_n\}$ eine Momentenfolge, so ist auch $\{C_n\}$ eine solche und damit $[H, C_n]$ ein Hausdorffsches Mittel. Die Gesamtheit der so entstehenden Mittel $[H, C_n]$ bildet eine reguläre Mannigfaltigkeit im Sinne des I. Teils der Arbeit. — (2) Weiter wird die Transformation (δ) in der Weise auf Reihen angewandt, daß einer Reihe $\sum_{p=0}^{\infty} c_p$ die ihr gemäß (δ) entsprechende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ zugeordnet wird. In den Teilsummen $s_p = \sum_{\mu=0}^p c_\mu$ und $S_n = \sum_{\nu=0}^n C_\nu$, der Reihen ausgedrückt lautet die sich so ergebende Reihentransformation

$$S_n = \sum_{p=0}^n b_{n,p} s_p \quad \text{mit} \quad b_{n,p} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \binom{2n+2}{n-p} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Diese Transformation definiert ein reguläres Summierungsverfahren, das von den Verff. als „Schursches Verfahren“ bezeichnet wird. Von den Eigenschaften dieses Verfahrens seien genannt: (a) Es ist äquivalent mit dem in Teil II betrachteten Verfahren von Mersman, also mit einem Gronwall'schen Verfahren. (b) Es summiert die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ innerhalb der Kurve $r = 2 - \cos \theta + [(1 - \cos \theta)(3 - \cos \theta)]^{\frac{1}{2}}$

zur Summe $1/(1-x)$, während es die Reihe außerhalb und auf dieser Kurve nicht mehr summiert. (c) Das Verfahren umfaßt das Verfahren von de la Vallée Poussin, nicht aber umgekehrt. F. Lösch (Rostock).

Rogosinski, W. W.: On Hausdorff's methods of summability. Proc. Cambridge Philos. Soc. **38**, 166—192 (1942).

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung einer allgemeinen Theorie der „Stärke“ Hausdorffscher Limitierungsverfahren (weiterhin kurz als „ H -Verfahren“ bezeichnet). Ein solches Verfahren wird allgemein durch eine lineare Transformation

$$t_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^{n-k}(\mu_k) \cdot s_k \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

der (reellen oder komplexen) Folge (s_k) in die Folge (t_n) geliefert, wobei (μ_k) eine gegebene (reelle oder komplexe) Zahlenfolge und $\Delta^p \mu_k$ die p -te Differenz dieser Folge ($\Delta^0(\mu_k) = \mu_k$, $\Delta^p(\mu_k) = \Delta^{p-1}(\mu_k) - \Delta^{p-1}(\mu_{k+1})$ für $p > 0$) bedeutet. Die Folge (s_k) heißt limitierbar zum Wert s nach der Methode $T \sim \mu_k$, wenn $t_n \rightarrow s$ für $n \rightarrow \infty$ gilt. — Zum Vergleich verschiedener H -Verfahren bedient sich Verf. der folgenden (von den üblichen teilweise etwas abweichenden) Bezeichnungen: Ein Verfahren T_2 heißt mindestens ebenso stark wie ein Verfahren T_1 , in Zeichen $T_2 \supseteq T_1$, wenn für jede Folge (s_k) aus der T_1 -Limitierbarkeit die T_2 -Limitierbarkeit folgt. Existiert dabei wenigstens eine T_2 - aber nicht T_1 -limitierbare Folge (s_k) , so heißt T_2 stärker als T_1 , in Zeichen $T_2 > T_1$. Gilt dagegen $T_2 \supseteq T_1$ und $T_1 \supseteq T_2$, so heißen T_1 und T_2 äquivalent, in Zeichen $T_2 \sim T_1$. Endlich heißt ein Verfahren T regulär, falls $T \supseteq C$ (C = Konvergenz) gilt. — (I) Verbindet man zwei H -Verfahren $T_1 \sim \mu_k^{(1)}$, $T_2 \sim \mu_k^{(2)}$ in der Weise, daß man nacheinander T_1 und T_2 anwendet, so entsteht wieder ein H -Verfahren, das mit $T_{2,1} = T_2 T_1$ bezeichnet wird; es ist von der Form $T_{2,1} \sim \mu_k^{(1)} \mu_k^{(2)}$. Ausgehend von dieser fundamentalen Tatsache stellt Verf. die folgende Frage: Verbindet man ein Verfahren T_1 mit einem regulären Verfahren θ , so gilt für das entstehende Verfahren $T_2 = \theta T_1$ gewiß $T_2 \supseteq T_1$; existiert umgekehrt zu zwei Verfahren $T_1 \sim \mu_k^{(1)}$, $T_2 \sim \mu_k^{(2)}$ mit $T_2 \supseteq T_1$ auch stets ein reguläres Verfahren θ derart, daß $T_2 = \theta T_1$ gilt? Das ist ohne weiteres zu bejahen, und zwar mit $\theta = \mu_k^{(2)} / \mu_k^{(1)}$, wenn sämtliche $\mu_k^{(1)} \neq 0$ sind. Darüber hinaus wird gezeigt, daß die Frage auch dann noch zu bejahen ist, wenn höchstens endlich viele $\mu_k^{(1)}$ verschwinden (was sich keineswegs unmittelbar aus dem trivialen Fall $\mu_k^{(1)} \neq 0$ folgern läßt). — (II) Für die weitere Untersuchung der aufgeworfenen Frage werden reguläre H -Verfahren zu Grunde gelegt. Dabei stützt sich Verf. auf die von N. Wiener in die Summabilitätstheorie eingeführte Methode der Fourier-Transformation. Ein reguläres Verfahren $T \sim \mu_k$ liegt bekanntlich vor, wenn μ_k eine Momentenfolge darstellt, d. h.

$$(1) \quad \mu_k = \int_0^1 t^k d\Phi(t) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

mit einer in $0 \leq t \leq 1$ schwankungsbeschränkten (reellen oder komplexen) Funktion $\Phi(t)$ gilt; unter Bezugnahme auf $\Phi(t)$ wird das Verfahren weiterhin mit $T \sim \Phi$ bezeichnet. Anknüpfend an (1) gewinnt man den Anschluß an die Wiener'sche Methode, indem man die Mellin-Transformation

$$(2) \quad T(z) = \int_0^1 t^z d\Phi(t) \quad (\Re z > 0)$$

eingührt. Die damit $\Phi(t)$ zugeordnete Funktion $T(z)$ wird die Momentenfunktion von T genannt. Sie ist in $\Re z > 0$ regulär und in $\Re z \geq 0$ noch stetig und beschränkt, überdies ist $\mu_k = T(k)$ für $k = 1, 2, \dots$ und $\mu_0 = T(0) + \{\Phi(+0) - \Phi(0)\}$. Die Ergebnisse des Verf. besagen dann zunächst grob ausgedrückt, daß die Stärke der regulären H -Verfahren weitgehend von der Verteilung der Nullstellen ihrer Momenten-

funktionen in der Halbebene $\Re z \geq 0$ (∞ eingeschlossen) abhängt. Genauer zeigt sich: (a) Die Verbindung zweier regulärer Transformationen $T_1 \sim \Phi_1$, $T_2 \sim \Phi_2$ drückt sich in den Momentenfunktionen so aus, daß $T_{2,1}(z) = T_2 T_1(z) = T_1(z) T_2(z)$ gilt. Daraus folgt, daß für reguläre Verfahren die Beziehung (3) $T_2 = \theta T_1$ gleichwertig ist mit der Beziehung (4) $T_2(z) = \theta(z) T_1(z)$ zwischen ihren Momentenfunktionen. Ist daher $\theta(z) = T_2(z)/T_1(z)$ die Mellintransformation einer schwankungsbeschränkten Funktion (kurz: „Funktion der Klasse M “), so gilt $T_2 \gtrsim T_1$. Umgekehrt folgt aus $T_2 \gtrsim T_1$ für reguläre H -Verfahren T_1, T_2 , daß $\theta(z) = T_2(z)/T_1(z)$ zu M gehört, vorausgesetzt, daß höchstens endlich viele $\mu_k^{(1)}$ verschwinden (vgl. (I)). Offen bleibt dabei die Frage, ob diese letztere Voraussetzung notwendig ist. (b) Um zu Aussagen in dieser Richtung zu kommen, ist zu bemerken, daß die Zugehörigkeit von $\theta(z)$ zu M speziell verlangt, daß $\theta(z)$ in $\Re z > 0$ regulär, in $\Re z \geq 0$ noch stetig und beschränkt ist. Soll daher (4) mit einem $\theta(z) \in M$ bestehen, so muß $T_2(z)$ in $\Re z \geq 0$ (∞ eingeschlossen) mindestens dieselben Nullstellen und mindestens von derselben Ordnung wie $T_1(z)$ aufweisen. Dazu läßt sich bemerkenswerterweise zeigen, daß für $T_2 \gtrsim T_1$ die Funktion $T_2(z)$ jedenfalls in $\Re z > 0$ mindestens dieselben Nullstellen und mindestens von derselben Ordnung wie $T_1(z)$ besitzt und daß $T_2(z)$ längs $\Re z = 0$ noch mindestens dieselben Nullstellen wie $T_1(z)$ aufweist. Es folgt daraus, daß für $T_2 \gtrsim T_1$ der Quotient $\theta(z) = T_2(z)/T_1(z)$ in $\Re z > 0$ regulär sein muß und daß genauer $T_2 > T_1$ gilt, wenn $\theta(z)$ in $\Re z > 0$ eine Nullstelle besitzt. — (III) Die Anwendung der im vorstehenden skizzierten allgemeinen Theorie auf spezielle H -Verfahren führt auf das Problem, möglichst einfache analytische Bedingungen dafür anzugeben, daß aus der Zugehörigkeit von $T_1(z)$ und $T_2(z)$ zu M die Zugehörigkeit von $\theta(z) = T_2(z)/T_1(z)$ zu M folgt. Zu hinreichenden Bedingungen dieser Art gelangt Verf. einerseits im Anschluß an die Untersuchungen von H. R. Pitt [Proc. Cambridge Phil. Soc. **34**, 510—520 (1938); dies. Zbl. **20**, 17], andererseits durch Heranziehung des Plancherelschen Satzes für Mellintransformationen. (a) Auf dem 1. Weg ergibt sich: Es sei $T_1 \sim \Phi_1(t)$, $T_2 \sim \Phi_2(t)$, wobei $\Phi_1(t)$ eine Funktion von „regulär beschränkter Schwankung“ bedeute [d. h. $\Phi(t) = \Phi_1(t) + \Phi_2(t)$, wo $\Phi_1(t)$ die Sprungfunktion und $\Phi_2(t)$ eine absolut stetige Funktion darstellt] und $|T_1(iy)| \geq d > 0$ (y reell) gelte. Ist dann $\theta(z) = T_2(z)/T_1(z)$ in $\Re z > 0$ regulär, in $\Re z \geq 0$ stetig und beschränkt, so gehört $\theta(z)$ zu M . (b) Der 2. Weg liefert zwei Bedingungen, wobei die wesentliche Einschränkung das eine Mal $T_2(z)$, das andere Mal $T_1(z)$ betrifft. Und zwar besteht diese Einschränkung darin, daß die betreffende Funktion (oder der wesentliche Teile derselben) einer gewissen Klasse von Mellintransformationen absolut stetiger Funktionen angehört. — (IV) Als Anwendungen seiner allgemeinen Theorie gibt Verf. einen Beweis des Mercerschen Satzes sowie des Äquivalenzsatzes der Cesàroschen und Hölderschen Verfahren beliebiger komplexer Ordnung k mit $\Re k > -1$. Er zeigt ferner, daß in seinen Resultaten die von Hurwitz und Silverman [Trans. Amer. Math. Soc. **18**, 1—20 (1917)] entwickelte Theorie der „analytischen“ H -Verfahren, sogar in verallgemeinerter Form, enthalten ist. *F. Lösch* (Rostock).

Knopp, Konrad: Über eine Erweiterung des Äquivalenzsatzes der C- und H-Verfahren und eine Klasse regulär wachsender Funktionen. Math. Z. **49**, 219—255 (1943).

Die vorliegende Arbeit ist als natürliche Fortsetzung der früheren Arbeit des Verf. „Über eine Klasse konvergenzerhaltender Integraltransformationen und den Äquivalenzsatz der C- und H-Verfahren“ [Math. Z. **47**, 229—264 (1941); dies. Zbl. **24**, 319] aufzufassen. Dort war bereits auf die (für Zahlenfolgen und ganzzahlige Ordnung) von I. Schur herrührende Verallgemeinerung des Äquivalenzsatzes (Ä. S.) hingewiesen worden, welche das asymptotische Verhalten (an Stelle des einfachen Konvergenzverhaltens beim ursprünglichen Ä.-S.) der C- und H-Mittel gleicher Ordnung k in Beziehung setzt. — In der Arbeit wird nun der ganze hierher gehörige Fragenkreis auch für Funktionen statt Folgen und nicht ganzzahlige $k > 0$ auf eine breitere Grundlage gestellt und ausführlich abgehandelt. Die Untersuchung stützt sich auf Methoden,

die Hardy und Riesz zum Beweis des „second theorem of consistency“ entwickelten, und bedient sich als wesentliches Hilfsmittel bei den Beweisen der regulär wachsenden Funktionen vom Index a (im Anschluß an die Arbeiten von Karamata). Das sind stetige Funktionen mit den beiden Eigenschaften:

$$(1) \quad \frac{1}{x |p(x)|} \int_0^x |p(t)| dt \leq M \text{ für alle } x > 0 \text{ (} M \text{ von } x \text{ unabhängig)}$$

$$(2) \quad \frac{1}{xp(x)} \int_0^x p(t) dt \rightarrow a \text{ für } x \rightarrow +\infty.$$

Eine genauere Kenntnis dieser Funktionenklasse wird durch ein besonderes Kapitel vermittelt. Für ganzzahlige $k > 0$ lautet der erweiterte Ä. S.: Existiert für eine bestimmte regulär wachsende Funktion $p(x)$ und ein bestimmtes k der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} c_k(x)/p(x) = g_k$, so existiert auch der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} h_k(x)/p(x) = g'_k$ und umgekehrt.

Ist a der Index von $p(x)$, so ist

$$g'_k = \frac{(1+a)(1+2a) \cdots (1+k-1a)}{2 \cdot 3 \cdots k} g_k.$$

Ist $p(x)$ eine beliebige für alle $x \geq 0$ stetige (komplexwertige) Funktion, so folgt aus der Existenz des einen der beiden Grenzwerte g_k, g'_k dann und nur dann die des anderen für jede zugelassene Funktion $s(t)$ und jedes ganzzahlige $k > 0$, wenn $p(x)$ regulär wächst. Zum Schluß wird noch gezeigt, daß auch das asymptotische Verhalten der Abel-Laplaceschen Mittel mit dem der Hölderschen und Cesàroschen Mittel ganz ähnlich verknüpft ist. — Die Arbeit bringt so recht den Reichtum an Ideen zum Ausdruck, die aus der an sich einfachen Fragestellung des Ä.-S. erwachsen sind. *Garten.*

Meyer-König, W.: Die Umkehrung der Euler-Knoppschen und des Borelschen Limitierungsverfahrens auf Grund einer Lückenbedingung. *Math. Z.* **49**, 151—160 (1943).

Verf. beweist die folgenden beiden Sätze über „reine“ Lückenreihen. Das sind Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n = 0$ für $n \neq \lambda_k$ ($k = 0, 1, \dots$; $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$), für welche die Lückenbedingung (1) $\lambda_{k+1} - \lambda_k > \vartheta \lambda_k$ mit positivem ϑ für alle k von einer Stelle an erfüllt ist.

Satz 1. Genügen die Glieder der Lückenreihe noch der Wachstumseinschränkung $a_n = O(\alpha^n)$ ($0 < \alpha$) für $n \rightarrow \infty$ und gilt für die B -Transformation

$$b(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!}$$

der Folge s_n ihrer Teilsummen $\lim_{x \rightarrow \infty} b(x) = s$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zum Wert s .

Satz 2. Gilt für die E_p -Transformation

$$e_n = (1/2^{pn}) \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} (2^p - 1)^{n-\nu} s_{\nu}$$

der Teilsummen einer solchen Lückenreihe die Beziehung $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = s$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zum Wert s , ohne daß es hierzu einer zusätzlichen Wachstumseinschränkung wie in Satz 1 bedarf. Der Satz 2) läßt sich ganz leicht auf Satz 1) zurückführen, weshalb nur der direkte Beweis für 1) erbracht wird. Der Kern des Beweises besteht in der Zurückführung des Problems auf die Frage nach der Auflösbarkeit eines endlichen linearen Gleichungssystems. — Die Beziehungen beider Sätze zu zwei ähnlich lautenden älteren Sätzen über (allerdings nicht notwendig „reine“) Lückenreihen, die nach dem E_p -Verfahren (Okada) bzw. dem B -Verfahren (Zygmund) summierbar sind, werden auseinandergesetzt. *Garten (Tübingen).*

Bosanquet, L. S.: A mean value theorem. J. Lond. Math. Soc. **16**, 146—148 (1941).

Nach M. Riesz [Acta Univ. Hungaricae Szeged **1**, 114—126 (1923); vgl. ferner S. Verblunsky, Proc. London math. Soc., II. s. **32**, 163—199 (1931); dies. Zbl. **1**, 207] gilt: Es sei $0 < \alpha \leq 1$, $0 \leq y \leq x$ und $f(t)$ L -integralabel in $0 \leq t \leq y$; dann ist

$$\left| \int_0^y (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right| \leq \max_{0 \leq u \leq y} \left| \int_0^u (u-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right|.$$

Dazu gibt Verf. ein Analogon mit Summen statt der Integrale. Es sei A_v^σ definiert durch $\sum_{v=0}^n A_v^\sigma x^v = (1-x)^{-\sigma-1}$ ($|x| < 1$). Ist dann $0 \leq \alpha \leq 1$, m, n, μ ganz und $0 \leq m \leq n$, so gilt

$$\left| \sum_{v=0}^m A_{n-v}^{\alpha-1} a_v \right| \leq \max_{0 \leq \mu \leq m} \left| \sum_{v=0}^\mu A_{\mu-v}^{\alpha-1} a_v \right|.$$

Meyer-König (Stuttgart).

Hadwiger, H.: Über eine Mittelwertformel für Richtungsfunktionale im Vektorraum und einige Anwendungen. J. reine angew. Math. **185**, 241—252 (1943).

Die betrachteten Richtungsfunktionale sind zum aus den s -dimensionalen Vektoren a_1, \dots, a_n bestehenden Vektorstern \mathfrak{S} und zum veränderlichen s -dimensionalen Einheitsvektor e zugeordnete skalare Funktionen $\Phi(\mathfrak{S}, e) = |a_1|^\alpha f(\theta_1) + \dots + |a_n|^\alpha f(\theta_n)$, wobei $\alpha \geq 0$ eine Konstante, θ_i der Neigungswinkel (a_i, e) und $f(\theta)$ eine eigentlich integrierbare Funktion ist. Einfaches Rechnen ergibt den auf der Oberfläche der s -dimensionalen Einheitskugel gebildeten Integralmittelwert

$$M(\Phi) = \sum_1^n |a_i|^\alpha \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)} \int_0^\pi f(\theta) \sin^{s-2} \theta d\theta.$$

Verf. zeigt, daß es zu jedem Funktional Φ Vektorsterne gibt, für welche $\frac{\Phi(\mathfrak{S}, e)}{\sum |a_i|^\alpha}$ bei jedem e in einer ε -Umgebung von $\frac{M(\Phi)}{\sum |a_i|^\alpha}$ bleibt. Sonderfälle der Tatsache, daß die

Funktion Φ auch Werte $\geq M(\Phi)$ annimmt, ergeben u. a. Verallgemeinerungen zweier auf komplexe Reihen bezüglicher Sätze von H. J. Hamilton [A theorem on subsequences, Amer. math. Monthly **44**, 586—587 (1937); Some theorems on subsequences, vgl. dies. Zbl. **18**, 253] und eines auf den Durchmesser von Polygonen mit gegebenen Seitenvektoren bezüglichen Satzes von A. E. Mayer (dies. Zbl. **19**, 141). Mit demselben Hilfsmittel beweist Verf., daß das bei veränderlichen x_1, \dots, x_s gebildete Maximum des

geometrischen Mittels $[(a_{11}x_1 + \dots + a_{1s}x_s) \cdots (a_{n1}x_1 + \dots + a_{ns}x_s)]^{\frac{1}{n}}$ unter den Bedingungen $a_{i1}^2 + \dots + a_{is}^2 = 1$ ($i = 1, \dots, n$) und $x_1^2 + \dots + x_s^2 = 1$, nicht kleiner als $\frac{1}{2} e^{\frac{1}{s} - \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{s}{2\lambda(2\lambda+s)}}$ ist; es wird vermutet, daß diese von n unabhängige Schranke scharf ist.

G. Hajós (Budapest).

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Johansen, Paul: Eine Formel für oskulierende Interpolation. Festschr. Prof. J. F. Steffensen 76—81 (1943) [Dänisch].

Ausgehend von der Determinantendarstellung für einen recht allgemeinen Typus polynomialer, oskulierender Interpolation

$$\begin{vmatrix} P(x), & \frac{x^n}{n!}, & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, & \dots & 1 \\ f^{(a_0)}(x_0), & \frac{x_0^{n-a_0}}{(n-a_0)!}, & \frac{x_0^{n-1-a_0}}{(n-1-a_0)!}, & \dots & \\ \vdots & & & & \\ f^{(c_n)}(x_n), & \frac{x_n^{n-a_n}}{(n-a_n)!}, & \frac{x_n^{n-1-a_n}}{(n-1-a_n)!}, & \dots & \end{vmatrix} = 0$$

werden zunächst einige formale Umformungen gegeben, sodann knapp auf eine Untersuchung von Birkhoff [Trans. Amer. Math. Soc. **7**, 107—136 (1906)] hingewiesen. Unter den besonderen Annahmen, daß $f(x_0)$, $f'(x_1)$, \dots , $f^{(n)}(x_n)$ gegeben sind, wird eine Interpolationsformel in der Form

$$f(x) = f(x_0) + \varphi_1(x)f'(x_1) + \dots + \varphi_n(x)f^{(n)}(x_n) + R(x)$$

hergeleitet, wo die Funktionen $\varphi_1(x)$, \dots , $\varphi_n(x)$ in der Arbeit nachzulesen wären. In dieser Formel ist neben der Taylorschen Formel auch eine Entwicklung nach Abelschen Potenzoiden enthalten. Schließlich werden noch Zusammenhänge mit einer Untersuchung von Steffensen (dies. Zbl. **26**, 208) festgestellt. *F. Knoll* (Wien).

Bjerreskov, S.: Über einige Anwendungen symbolischer Rechnung in der Interpolationslehre. Festschr. Prof. J. J. Steffensen 24—28 (1943) [Dänisch].

Mit Hilfe der bekannten Operatorenrechnung wird die Formel

$$E^a = \sum_{\mu=0}^n \frac{E^\mu}{\mu!} \frac{a^{(n+1)}}{(a-\mu)} \cdot \frac{(-1)^{n-\mu}}{(n-\mu)!}$$

gewonnen. — Ebenso wird die leicht zu deutende Quadraturformel

$$(E^n - 1)D^{-1} = k_0 + k_1\Delta + \dots + k_n\Delta^n,$$

die die Simpsonsche Formel als Sonderfall enthält, hergeleitet. Von der Formel

$$\sin mD = m \sin D \cdot \prod_{\alpha=1}^{\frac{m-1}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 D}{\sin^2 \frac{\alpha\pi}{m}} \right), \quad m \text{ ungerade,}$$

wird über die Formel

$$\sin \pi D = \pi D \left(1 - \frac{D^2}{1^2} \right) \left(1 - \frac{D^2}{2^2} \right) \dots$$

und über die bekannte Partialbruchreihe von $\pi \cos \pi D$ die Formel für $\frac{1}{e^D - 1} - \frac{1}{D}$ gewonnen, die symbolisch die Eulersche Formel enthält. *F. Knoll* (Wien).

Hardy, G. H.: Note on Lebesgue's constants in the theory of Fourier series. J. London Math. Soc. **17**, 4—13 (1942).

Verf. gibt in der vorliegenden Note für die Lebesgueschen Konstanten

$$L_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin Nt|}{|\sin t|} dt \quad (N = 2n + 1)$$

zwei neue Integraldarstellungen und gewinnt damit einen neuen Zugang zum Beweis bekannter Eigenschaften der L_n : (1) Unter Heranziehung der von L. Fejér [Ann. École norm. III. s. **28**, 63—103 (1911)] angegebenen Darstellung der L_n erhält man durch Ausführung des Integrals $\frac{1}{2\pi i} \int \text{ctg } Nz \text{tg } z \frac{dz}{z}$ um das Rechteck $(\frac{1}{2}\pi - iY, \frac{1}{2}\pi + iY, -\frac{1}{2}\pi + iY, -\frac{1}{2}\pi - iY)$ und anschließenden Grenzübergang $Y \rightarrow \infty$ die Formel

$$L_n = \int_0^\infty \frac{\Im y \, Ny}{\Im y \, y^2 + \frac{1}{4}\pi^2} dy.$$

Dieser Darstellung der Lebesgueschen Konstanten läßt sich die von G. N. Watson [Quart. J. Math., Oxford Ser. **1**, 310—318 (1930)] angegebene asymptotische Formel für L_n entnehmen, wobei sich deren Koeffizienten auf sehr natürliche Weise ergeben. — (2) Durch Betrachtung des um das Rechteck $(0, \pi, \pi + iY, iY)$ erstreckten Integrals $\int \frac{\sin Nz}{\sin z} \log(i \text{ctg } \frac{1}{2} Nz) dz$ und anschließenden Grenzübergang $Y \rightarrow \infty$ erhält man die Formel

$$L_n = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\Im Ny}{\Im y} \log \text{tg } \frac{1}{2} Ny dy.$$

Ihr entnimmt man mühelos die von G. Szegő [Math. Z. 9, 163—166 (1921)] angegebene Darstellung der L_n sowie die von Szegő aus dieser Darstellung gewonnenen Relationen $\Delta L_n = L_n - L_{n+1} < 0$, $(-1)^r \Delta^r L_n > 0$ ($r = 2, 3, \dots$). F. Lösch (Rostock).

Hardy, G. H.: Notes on special systems of orthogonal functions. 4. The orthogonal functions of Whittaker's cardinal series. Proc. Cambridge Philos. Soc. 37, 331—348 (1941).

Die zur Funktion $f(x)$ gehörige, in der Überschrift genannte Reihe [Whittaker, Proc. Edinburgh Roy. Soc., II. s. 35, 181—194 (1915)] ist

$$(1) \quad \mathfrak{E} = \sum_{-\infty}^{\infty} f(m) \psi_m(x), \text{ wo die Funktionen } \psi_m(x) = (-1)^m \sin \pi x / [\pi(x - m)]$$

die Mitglieder einer in $(-\infty, \infty)$ vollständigen orthonormen Gesamtheit \mathcal{P} sind. Gehört f zu L^2 , so streben die Teilsummen der zu f zugeordneten, mit \mathcal{P} gebildeten Fourierschen Reihe \mathfrak{F} im quadratischen Mittel gegen eine Funktion $F(x)$ von L^2 , die mit $f(x)$ übereinstimmen kann. Verf. betrachtet nun allgemeinere Klassen von

Funktionen. Er rechnet $f(x)$ zu M , wenn $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x)|}{2 + |x|} dx < \infty$; zu M^* , wenn

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x)| \log(2 + |x|)}{2 + |x|} dx < \infty$. Im ersten Falle ist das zu f gehörige Fouriersche Polynom

$$s_n(x) = \sum_{-\infty}^n a_m \psi_m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) S_n(x, y) dy \quad \text{mit} \quad S_n(x, y) = \sum_{-\infty}^n \psi_m(x) \psi_m(y).$$

Verf. gibt bei festen x und y eine feste Schranke der $|S_n|$ an; er zeigt ferner, daß S_n mit $n \rightarrow \infty$ gegen $\sin \pi(x - y) / [\pi(x - y)]$ strebt. Das geschieht z. B. bei allen y gleichmäßig, wenn $|x| \leq X$; in diesem Gebiet ermittelt Verf. eine von X und y abhängige Schranke der $|S_n|$. — Ist die Funktion $f(x)$ in M^* enthalten, so konvergiert \mathfrak{F} zur Summe

$$(2) \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [\sin \pi(y - x) / \pi(y - x)] f(y) dy$$

gleichmäßig in jedem endlichen x -Gebiete. — Ist $f(x)$ in M enthalten, so ist \mathfrak{F} ebenda zum Werte (2) gleichmäßig $(C, 1)$ -summierbar. — B sei die Unterklasse der Funktionen von M , bei denen $(2^*) F(x) = f(x)$ wird. Die Funktionen $f(x)$ von B lassen sich durch das Stieltjesche Integral

$$(3) \quad f(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x i t} dG(t) \text{ darstellen, wo } (4) \quad G(x) = i \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-x i t} - 1) t^{-1} f(t) dt.$$

$G(x)$ ist außerhalb $(-\pi, \pi)$ fest, d. h. es ist $G(x) = G(-\pi)$, wenn $x < -\pi$; $G(x) = G(\pi)$, wenn $x > \pi$. Hat $f(x)$ die Gestalt (3) und ist dabei G stetig, so gilt (2^*) im Sinne $(C, 1)$. Ist $G(t)$ stetig und erfüllt an $t = -\pi$ und $t = \pi$ eine Fouriersche Konvergenz-Bedingung, so gilt (2^*) , und das Integral in (2^*) ist von Cauchyscher Art. — Ist f in M enthalten, so ist für die Zugehörigkeit von f zu B kennzeichnend, daß f in der Form (3) ausdrückbar sei mit stetiger Funktion $G(t)$. — Über die Reihe \mathfrak{E} (1) beweist Verf., daß (3) bei den Funktionen von M^* zu der Konvergenz von \mathfrak{E} gegen $f(x)$ für alle x hinreicht, bei den Funktionen von M zur $(C, 1)$ -Summierbarkeit. Zum Schlusse verschärft Verf. einen von Whittaker a. a. O. aufgestellten Satz, der die $(C, 1)$ -Summierbarkeit von \mathfrak{E} betrifft. (I, II; III s. dies. Zbl. 21, 19; 23, 46.) Koschmieder (Graz).

Spezielle Orthogonalfunktionen:

● Magnus, Wilhelm, und Fritz Oberhettinger: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. (Die Grundlehren d. math. Wiss. in Einzeldarstell. mit besonderer Berücksichtigung d. Anwendungsgeb.) Hrsg. v. W. Blaschke,

R. Grammel, E. Hopf, F. K. Schmidt u. B. L. van der Waerden. Berlin: Springer 1943. VIII, 172 S. RM. 12.—.

Das Buch will dem Mathematiker, Physiker und Techniker ersparen, aus großen Werken mühsam herauszusuchen, was er von den besonderen Funktionen zu seiner Tagesarbeit braucht. Die Verf. haben in ihm das Nötige auf engen Raum zusammenzudrängen verstanden. Auf Beweise und auf die Schilderung der Verfahren verzichten sie; von Einzelgegenständen sind — aus triftigen Gründen — die Laméschen Funktionen weggeblieben, ferner die Reihenentwicklungen nach orthogonalen Funktionen. Der Inhalt des Buches gliedert sich in folgende Abschnitte: I. Gammafunktion. II. Hypergeometrische Funktion. Riemannsche Differentialgleichung. III. Zylinderfunktionen (Zf.). Außer den Grundtatsachen Additionssätze und Multiplikationssatz, asymptotische Entwicklungen, Angaben über Nullstellen, Integralausdrücke der Zf., bestimmte Integrale mit Zf., Funktionen von Struve, Anger, Weber, Lommel, Kapteynsche und Schlömilchsche Reihen. Im Anhang Mathiesche Funktionen. IV. Kugelfunktionen (Kf.), nach ähnlichen Gesichtspunkten wie in III. Als Sonderfälle der allgemeinen Kf. die Kegel- und Ringfunktionen. Im Anhang Funktionen von Gegenbauer. V. Orthogonale Polynome von Tschebyscheff, Hermite, Jacobi, Laguerre. VI. Entartete hypergeometrische Funktionen. Die Funktionen von Kummer und Whittaker. Sonderfälle: Die Funktionen des parabolischen Zylinders; unvollständige Gammafunktion; Fehlerintegral und Fresnelsche Integrale; Integrallogarithmus, -sinus und -cosinus. VII. Thetafunktionen. Elliptische Funktionen (nach Weierstraß und Jacobi) und Integrale. VIII. Integralverwandlungen von Fourier, Laplace, Hankel, Mellin und Gauß — je mit einer Tafel von Beispielen. IX. Wechsel der Koordinaten (K.). Ableitungsvorgänge in rechtwinkligen K. Bernoullis Trennung der Veränderlichen in der Wellen- und Wärmeleitungsgleichung bei verschiedener Wahl der K. — Eine Liste der Abkürzungen und der Funktionszeichen erleichtern den Gebrauch des nützlichen Werkes, das mit einem ausführlichen Schrifttumsnachweise schließt. *Koschmieder* (Graz).

Buchholz, Herbert: Die konfluente hypergeometrische Funktion mit besonderer Berücksichtigung ihrer Bedeutung für die Integration der Wellengleichung in den Koordinaten eines Rotationsparaboloides. Z. angew. Math. Mech. **23**, 101—118 (1943).

Fortsetzung der in dies. Zbl. **28**, 52 besprochenen Arbeit. Zunächst gibt Verf. eine neuartige Entwicklung für $M_{\nu, p/2}(z)$ im Falle, daß ν und z rein imaginär, p aber ≥ 0 ganz ist:

$$(5) \quad (i\zeta)^{-\frac{1}{2}(p+1)} M_{i\tau, p/2}(\zeta i) = \sqrt{\pi} \Gamma\left(1 + \frac{p}{2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{p+1}{2} + \lambda\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{p}{2} + 1 + \lambda\right) \\ \cdot \frac{1}{\lambda!} \cdot \left|\frac{\zeta}{4}\right|^{\lambda+1/2} \cdot \prod_{r=0}^{\lambda-1} \left(1 + \frac{\tau^2}{\left(\frac{p+1}{2} + r\right)}\right) \cdot \left\{ J_{\lambda-1/2}\left(\left|\frac{\zeta}{2}\right|\right) + \frac{\tau \cdot \text{sign } \zeta}{\frac{p+1}{2} + \lambda} \cdot J_{\lambda+1/2}\left(\left|\frac{\zeta}{2}\right|\right) \right\},$$

gültig für reelle ζ und $\tau > 0$; ähnliche Entwicklungen werden für die Ableitungen der linken Seite nach ζ und τ abgeleitet, woraus die Grenzbeziehungen

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \{(i\zeta)^{-\frac{1}{2}(p+1)} M_{i\tau, p/2}(i\zeta)\} = 1; \quad \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \zeta} \{\dots\} = \frac{\tau}{p+1}, \quad \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \tau} \{\dots\} = 0, \\ \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \zeta} \{\dots\} = \frac{1}{p+1}$$

folgen. Da diese Reihen für die numerische Rechnung nur etwa für $\tau < 5$ brauchbar sind, ergänzt sie Verf. durch andere Entwicklungen für große τ , die gleichfalls aus der Integraldarstellung abgeleitet werden, und aus denen für rein imaginäres ν, z und großes ν folgt:

$$(6) \quad M_{\nu, p/2}(z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(p+1) \nu^{-p/2} \left(\frac{z}{\nu}\right)^{1/4} \cos(2\sqrt{\nu z} - \pi p/2 - \pi/4).$$

Die Resultate werden zur Tabulierung und kurvenmäßigen Darstellung der Funktion

$$(7) \quad m_{\nu}^{(p)}(z) = \sqrt{\pi/2z} M_{\nu, p/2}(z) \quad \text{für } \nu = i\tau, z = i\zeta$$

und ihrer Ableitung nach ζ verwendet. Für die Anwendungen wichtig ist eine zu (5) ähnliche Entwicklung der Funktion $W_{\nu, p/2}(z)$ bei rein imaginären ν, z , die Verf. für $p = 0$ ableitet. Ebenfalls aus den Integraldarstellungen leitet man für $m_{\nu}^{(p)}(z)$ und die analog zu (7) erklärten $w_{\nu}^{(p)}(z)$ Rücklaufformeln her; als Beispiel diene:

$$m_{\nu}^{(p)}(z) = m_{\nu \pm 1}^{(p)}(z) \pm \frac{\sqrt{z}}{p+1} m_{\nu \pm 1/2}^{(p+1)}(z); \quad w_{\nu}^{(p)}(z) = \left(-\nu + \frac{1 \mp p}{2} \right) w_{\nu-1}^{(p)}(z) + \sqrt{z} \cdot w_{\nu-1/2}^{(p+1)}(z).$$

Das asymptotische Verhalten der Whittakerschen Funktionen: 1) für große $|z|$ mit $|\arg z| < \pi$ gilt:

$$W_{\nu, p/2}(z) \sim z^{\nu} e^{-z/2} \cdot {}_2F_0\left(\frac{1+p}{2} - \nu, \frac{1-p}{2} - \nu; -\frac{1}{z}\right),$$

(4) vermittelt die entsprechende Formel für $M_{\nu, p/2}(z)$; 2) (6) gilt für $\Re \nu \geq 0$ und große $|\nu|$; 3) für $|\arg p| < \frac{\pi}{2}$ und große p ist $M_{\nu, p/2}(z) \sim z^{\frac{p+1}{2}}$. Aus der Differentialgleichung (1) gewinnt man durch die Greensche Operation

$$m_{\nu}^{(p)}(z) w_{\nu}^{(p)}(z) - m_{\nu}^{(p)}(z) w_{\nu}^{(p)}(z) = \frac{\pi}{2} \Gamma(p+1) \Gamma^{-1}\left(\frac{p+1}{2} - \nu\right) \cdot z^{-1}$$

und die Orthogonalitätsbeziehungen:

$$\int_0^{\infty} m_{n+\frac{p+1}{2}}^{(p)}(x) m_{n'+\frac{p+1}{2}}^{(p)}(x) dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \Gamma^2(p+1) \Gamma(n+1) \Gamma^{-1}(n+p+1) & \text{für } n = n' \\ 0 & \text{für } n \neq n' \end{cases}$$

Für die Praxis wichtiger sind folgende Orthogonalitäten: τ_n ($n = 1, 2, \dots$) bezeichne die Wurzelfolge der Gleichung $m_{i\tau_n}^{(p)}(i\zeta_0) = 0$ bei gegebenem ζ_0 , dann ist

$$\int_0^{\zeta_0} m_{i\tau_n}^{(p)}(i\zeta) m_{i\tau_{n'}}^{(p)}(i\zeta) d\zeta = \begin{cases} -\zeta_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} m_{i\tau_n}^{(p)}(i\zeta)|_{\zeta=\zeta_0} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} m_{i\tau}^{(p)}(i\zeta_0)|_{\tau=\tau_n} & \text{für } n = n' \\ 0 & \text{für } n \neq n'. \end{cases}$$

Nun zeigt Verf. die Anwendung dieser Funktionen für die einfachsten Wellentypen in drehparabolischen Koordinaten. Die Wellenfunktion einer ebenen Welle, deren Strahlvektor mit der Paraboloidachse den Winkel χ bildet, lautet z. B.

$$\Phi(\xi, \eta, \varphi) = \frac{2}{\pi \cos^2(\chi/2)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(n+p+1)}{\Gamma(n+1) \Gamma^2(p+1)} \cdot (2 - \delta_{0p}) \left(i \tan \frac{\chi}{2} \right)^{2n+p} \cdot m_{n+\frac{p+1}{2}}^{(p)}(2i\eta k) \cdot m_{n+\frac{p+1}{2}}^{(p)}(-2i\xi k) \cdot \cos p\varphi,$$

wobei δ_{ik} das Kroneckersche Symbol darstellt. Im anderen Falle, daß das Erregungszentrum der Welle im Brennpunkt des Paraboloides liegt, kommt es auf die neuartige Entwicklung

$$\frac{e^{ik(\xi+\eta)}}{k(\xi+\eta)} = -\frac{2}{\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} w_{-s}^{(0)}(-2i\xi k) w_{+s}^{(0)}(-2i\eta k) \frac{ds}{\cos \pi s}, \quad \xi, \eta > 0; \quad 0 < |\sigma| < \frac{1}{2}$$

an, deren rechte Seite etwa für $\xi > \eta$ auch geschrieben werden kann

$$-\frac{4i}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w_{-n-1/2}^{(0)}(-2i\xi k) w_{n+1/2}^{(0)}(-2i\eta k).$$

Den Beschluß der Arbeit bilden Reihenentwicklungen nach M -Funktionen, Integraldarstellungen für die Produkte je zweier M - oder W -Funktionen sowie eine Zusammenstellung der Sonderfälle, die auf andere bekannte Funktionen führen.

Harald Geppert (Berlin).

Erdélyi, A.: *Integration of the differential equations of Appell's function F_4* . Quart. J. Math., Oxford Ser. 12, 68—77 (1941).

Die in der Überschrift genannte Funktion F_4 befriedigt das Gefüge partieller Differentialgleichungen

$$(1) \quad \begin{aligned} x(1-x) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] \frac{\partial z}{\partial x} - (\alpha + \beta + 1)y \frac{\partial z}{\partial y} - \alpha\beta z &= 0, \\ y(1-y) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + [\gamma' - (\alpha + \beta + 1)y] \frac{\partial z}{\partial y} - (\alpha + \beta + 1)x \frac{\partial z}{\partial x} - \alpha\beta z &= 0. \end{aligned}$$

Verf. gibt für F_4 einen Integralausdruck an,

$$(2) \quad F_4(\alpha, \beta; \gamma, \gamma'; x, y) = \Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma') \Gamma(2 - \gamma - \gamma') e^{(\gamma + \gamma')\pi i} (2\pi i)^{-2} \\ \times \int_{\mathfrak{P}} t^{-\gamma} (1-t)^{-\gamma'} F\left(\alpha, \beta; \gamma + \gamma' - 1; \frac{x}{t} + \frac{y}{1-t}\right) dt;$$

\mathfrak{P} ist darin eine Pochhammersche Doppelschleife, die sich derart um die Punkte 0 und 1 windet, daß $|x/t + y/(1-t)|$ längs \mathfrak{P} unter 1 bleibt. (2) legt ihm die Vermutung nahe, daß

$$(3) \quad z = \int_{\mathfrak{C}} t^{-\gamma} (1-t)^{-\gamma'} f\left(\frac{x}{t} + \frac{y}{1-t}\right) dt$$

eine Lösung des Gefüges (1) ist, wenn \mathfrak{C} einen geschlossenen Weg bedeutet, $f(\omega)$ einen Zweig des Riemannschen Funktion

$$(4) \quad P \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & & 1 & \infty \\ 0 & & 0 & \alpha \\ 2 - \gamma - \gamma' & \gamma + \gamma' - \alpha - \beta - 1 & \beta & \omega \end{array} \right\}.$$

Verf. bestätigt, daß (3) das Gefüge (1) erfüllt, und deutet den Nachweis an, daß jede Lösung von (1) sich durch Integrale der Art (3) linear darstellen läßt. — Singularitäten des Integranden von (3) rühren von der P -Funktion her, also von den Stellen $\omega = \infty, 0, 1$; ihnen gehören als Werte von t zu: 0, 1, $x/(x-y)$, ∞ und die beiden Wurzeln X, Y der quadratischen Gleichung

$$t(1-t) - x(1-t) - yt = 0.$$

[X, Y ermöglichen Burchnall (s. dies. Zbl. 22, 336) eine besondere Behandlung von (1) in dem Ausnahmefall \mathfrak{A} , daß $\alpha + \beta + 1 = \gamma + \gamma'$.] — Alle singulären Linien von (1) kommen durch den Zusammenfall zweier der aufgezählten Singularitäten zustande; ihre Gleichungen lauten $X = 0, 1, \infty$; $Y = 0, 1, \infty$; $X = Y$ (nicht $X + Y - 1 = 0$). — Ersetzt man die P -Funktion in bekannter Weise durch ein Integral, so wird (3) ein Doppelintegral; bei der Einführung geeigneter neuer Veränderlicher geht es in eine Form über, die erkennen läßt, daß die Lösungen von (1) im Falle \mathfrak{A} Malwerte hypergeometrischer Funktionen von X und von Y sind. — Von den singulären Punkten (s. P.) des Gefüges (1) sind $x = y = 0$, $x = y^{-1} = 0$, $y = x^{-1} = 0$ Schnitte zweier s. Kurven, $x = 1 - y = 0$, $1 - x = y = 0$, $x = y = \infty$ dagegen Schnitte dreier solcher. Verf. gibt nun die zu den s. P. erster Art gehörige Hauptgesamtheit \mathfrak{S}_1 von Lösungen an, wobei er darauf Bezug nimmt, daß sie für $x = y = 0$ bekannt ist. Zu den s. P. zweiter Art gehört eine Hauptgesamtheit \mathfrak{S}_2 , die nur in einem Überkegel mit der Spitze $X = Y = 0$ kanonisch ist, nicht in der ganzen überkugel-förmigen Umgebung dieses Punktes. — Die Monodromiegruppe von (1) wird durch die drei Ersetzungen S_1, S_2, AS_3A^{-1} erzeugt, wo S_1, S_2, S_3 quadratische vierreihige Diagonalmatrizen sind, S_1 mit den Diagonalelementen (D. E.) 1, $e^{-2\pi i \gamma}$, 1, $e^{-2\pi i \gamma'}$; S_2 mit den D. E. 1, 1, $e^{-2\pi i \gamma'}$, $e^{-2\pi i \gamma}$; S_3 mit den D. E. 1, 1, 1, $e^{4\pi i (\gamma + \gamma' - \alpha - \beta - 1)}$. A ist die quadratische vierreihige Matrix, die \mathfrak{S}_2 in \mathfrak{S}_1 überführt.

Koschmieder (Graz).

Funktionentheorie:

Lipka, Stephan: Über die absolute Konvergenz von Polynomreihen. *Math. Z.* **49**, 192—196 (1943).

Verf. betrachtet Reihen von der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z)$, wo die P_n Polynome sind mit lauter reellen Koeffizienten und die a_n beliebige komplexe Zahlen. Unter gewissen Bedingungen kann aus der absoluten Konvergenz der Reihe in einem Punkte z_0 , $\Im(z_0) \neq 0$, über das weitere Konvergenzverhalten Aufschluß gewonnen werden. Verf. untersucht 2 Fälle: 1. Sämtliche Nullstellen der P_n liegen in einem Intervall $\xi_1 \leq x \leq \xi_2$ der reellen Achse. Dann konvergiert die Reihe absolut im Kreisbogenzweieck

$$|z - \xi_i| \leq |z_0 - \xi_i|, \quad i = 1, 2$$

2. In jeder Halbebene $\Re(z) \geq a$ ist die Nullstellenanzahl der P_n gleichmäßig für jedes n beschränkt und in einer festen Umgebung von z_0 sind die P_n von Null verschieden. Dann konvergiert die Reihe absolut in der Halbebene $\Re(z) > \Re(z_0)$. Dies sind die Verallgemeinerungen der Resultate von E. Hille (dies. Zbl. **18**, 352). *A. Pfluger.*

Popovât, Petre: Sur les régions de monovalence des fonctions rationnelles. *Disquisition. Math. et Phys.*, București **2**, 169—251 (1942).

Soit $y = f(x)$ une fraction rationnelle de degré n . Considérant les points critiques de la fonction inverse $x = \varphi(y)$ comme des trous dans le plan (y) , on peut joindre ces points par un système de coupures qui rend le plan (y) simplement connexe. Il correspond à ces coupures certaines courbes du plan (x) qui divisent ce plan en n régions R simplement connexes. La relation $y = f(x)$ établit une correspondance biunivoque entre chacune de ces régions et le plan (y) armé de ses coupures. L'auteur précise la structure des régions R lorsque le système de coupures est formé de courbes simples joignant un point déterminé non-critique à chacun des points critiques. Il en déduit la façon dont se permutent les branches de $x = \varphi(y)$. Il étudie enfin avec détails quelques cas particuliers ($y = x^n$; fonctions qui interviennent dans les transformations de fonctions circulaires ou elliptiques; fonctions polyédriques). *Dufresnoy (Bordeaux).*

Dufresnoy, Jacques: Sur quelques propriétés des cercles de remplissage des fonctions méromorphes. *Ann. École norm.*, III. s. **59**, 187—209 (1942).

Verf. knüpft an Gegenstand und Methode seiner These an (dies. Zbl. **25**, 322) und entwickelt — nach einer kleinen qualitativen Verbesserung seiner Konstantenschätzung — die Theorie der cercles de remplissage vom Standpunkt der Ahlfors'schen Theorie der Überlagerungsflächen. *Ullrich (Gießen).*

Dufresnoy, Jacques: Une propriété des surfaces de recouvrement. *C. R. Acad. Sci.*, Paris **215**, 252—253 (1942).

Verf. gibt unter denselben Voraussetzungen wie in der in dies. Zbl. **28**, 55 besprochenen Arbeit eine Beweisskizze für die Existenz eines L_0 , so daß stets $L > L_0$ gilt, sobald $S > \frac{1}{2}$ ist; L und $4\pi S$ bezeichnen, wie stets in der Ahlfors'schen Theorie der Überlagerungsflächen Σ , Randlänge und Flächeninhalt des betrachteten Σ .

Ullrich (Gießen).

Myrberg, P. J.: Über transzendente hyperelliptische Integrale erster Gattung. *Ann. Acad. Sci. Fennicae A I*, Nr 14, 1—32 (1943).

Die Arbeit gilt der Ausdehnung des Begriffs der Integrale erster Gattung auf transzendente Riemannsche Flächen, wie sie bei denselben Flächen schon H. Hornich (vgl. dies. Zbl. **8**, 120; **13**, 22; **21**, 329; vgl. ferner für den allgemeinen Fall die Arbeit von R. Nevanlinna, dies. Zbl. **24**, 421) untersucht hat. Es werden hier zweiblättrige Riemannsche Flächen F mit unendlichvielen reellen, sich einseitig im Unendlichen häufenden Verzweigungspunkten betrachtet. Stellt man F als Grenzfall hyperelliptischer Flächen F_p mit wachsendem Geschlecht p dar, so ergeben sich zunächst elementare Normalintegrale erster Gattung φ_n mit normierten Perioden als Limiten der entsprechenden algebraischen Normalintegrale erster Gattung auf F_p . Für das Dirich-

letsche Integral eines auf F regulären Integrals ergibt sich eine zum algebraischen Fall analoge Darstellung als Bilinearform in den Perioden. Die Integralsumme $\sum c_n \varphi_n$ mit konvergenter $\sum |c_n|$ stellt ein auf F reguläres Integral mit auf \bar{F} beschränktem Imaginärteil dar: es wird als allgemeines Normalintegral erster Gattung auf F bezeichnet. Nun werden Normalklassen von Integralen auf F definiert: eine Menge von Integralen auf F heißt eine Klasse, wenn sie mit f auch cf und mit zwei Integralen f_1 und f_2 auch $f_1 + f_2$ enthält; eine Klasse heißt Normalklasse, wenn ihre Integrale sämtlich Normalintegrale sind. Für die Integrale einer Normalklasse gilt dann die Darstellung

$$f = \frac{1}{2\pi i} \sum_{A_n} \varphi_n \cdot \int_{A_n} dt,$$

es ist also f durch seine A -Perioden bis auf Konstante eindeutig festgelegt (dadurch werden also alle eindeutigen Integrale, wie die ganzen Funktionen ausgeschaltet). Es werden einige wichtige Normalklassen aufgestellt, wie die der absolut beschränkten Integrale und der Integrale mit endlichem Dirichletschen Integral. Schließlich werden für spezielle Flächen F hinreichende Bedingungen für die ganze Funktion $h(x)$ angegeben, damit das Integral $\int \frac{h(x)}{y} dx$ ein Normalintegral ist. H. Hornich.

Delange, Hubert: Sur le domaine de convergence absolue des séries multiples de puissances. Bull. Sci. math., II. s. **67**, 115—136 (1943).

Etude dans le plan rapporté aux coordonnées $\varrho = \log |z|$, $\varrho' = \log |z'|$, du domaine de convergence absolue Δ de la série $\sum a_{mn} z^m z'^n$. Construction de Δ à partir des demi-plans $\log |a_{mn} z^m z'^n| = m\varrho + n\varrho' + \log |a_{mn}| < 0$. Transformation de la construction par polaires réciproques. Les résultats obtenus sont connus dans leur ensemble [Hartogs, Math. Ann. **62**, 1—88 (1906); Faber, Math. Ann. **61**, 289—324 (1905); cf. Behnke et Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, Berlin 1934, p. 37; ce Zbl. **8**, 365]. — Le comportement de la série des modules en un point (ϱ, ϱ') de Δ situé à une distance d de la frontière γ est précisé

de la manière suivante: $\limsup. |a_{mn} z^m z'^n|^{\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}}$ vaut e^{-d} et la $\limsup.$ n'est atteinte que lorsque la direction (m, n) tend vers celle d'une normale à γ . P. Lelong.

Lelong, Pierre: Sur une propriété de la frontière d'un domaine d'holomorphic. C. R. Acad. Sci., Paris **216**, 107—109 (1943).

Verf. formuliert ohne Beweis den folgenden Satz: Wenn D ein Holomorphiebereich einer analytischen Funktion von n Variablen und $\delta(M, a_k)$ die kürzeste Distanz eines innern Punktes M von der Grenze von D bedeuten [die Distanz wird in einer beliebigen komplexen Ebene (a_k) durch M gemessen], ist $-\log \delta(M, a_k)$ eine plurisubharmonische Funktion von M . — In dieser nicht mehr rein lokalen Eigenschaft ist die bekannte Bedingung von E. E. Levi enthalten. Saxer (Zürich).

Peschl, E.: Über den Cartan-Carathéodoryschen Eindeutigkeitsatz. Math. Ann. **119**, 131—139 (1943).

L'au. étend à certains domaines non bornés de l'espace C^n des n variables complexes le théorème d'unicité de H. Cartan et Carathéodory: il existe au plus une transformation analytique complexe $Z_k = f_k(z_1, \dots, z_n)$ d'un domaine B en un domaine borné B^* qui amène O de B en un point déterminé O^* de B^* , les dérivées partielles premières en O des f_k prenant des valeurs données; les points O et O^* sont supposés n'être pas des points de ramification des domaines B et B^* . — L'au. dit qu'un domaine B (borné ou non) de C^n appartient à la classe K_l^n si pour un système quelconque de fonctions φ_i holomorphes et bornées dans B , le rang du tableau $\frac{\partial \varphi_i}{\partial z_j}$ est au plus égal à l , et s'il existe un système de l fonctions de cette sorte pour lequel ce rang est effectivement l , au moins en certains points de B . Le théorème d'unicité cité plus

haut s'étend aux domaines de la classe K_n^n : outre les domaines bornés et ceux pour lesquels la métrique $m(P, Q)$ de Carathéodory ne s'annule que si $P = Q$, on trouve aussi dans K_n^n des domaines qui ne se laissent pas représenter sur un domaine borné de C^n . En collaboration avec H. Behnke (ce Zbl. **13**, 406), l'a. avait démontré pour $n = 2$ le résultat suivant: si B est un domaine de C^n non ramifié à l'origine et s'il existe dans B n fonctions $G_k(z_1, \dots, z_n)$ dont les développements en séries de polynômes homogènes au voisinage de l'origine aient pour éléments initiaux des polynômes formant un système de déterminant fonctionnel non identiquement nul, alors toute transformation de B en un domaine intérieur de la forme $(1) Z_v = f_v(z_1, \dots, z_n) = z_v + \dots$ est la transformation identique. Cet énoncé est le point de départ de la démonstration du théorème suivant qui établit le théorème d'unicité pour la classe K_n^n : si B est non ramifié à l'origine et s'il existe dans B n fonctions régulières bornées dont le déterminant fonctionnel ne s'annule pas identiquement, alors toute transformation de B en un domaine intérieur, définie par (1) en ce qui concerne les termes du premier degré au voisinage de l'origine, est la transformation identique. *P. Lelong* (Grenoble).

Peschl, E.: Über einfach zusammenhängende Bereiche im Raume zweier komplexer Veränderlichen, die sich nicht auf echte Teilbereiche von sich analytisch abbilden lassen. *Mh. Math. Phys.* **51**, 63—84 (1943).

Un exemple de domaine non borné, simplement connexe, dont toute représentation analytique complexe sur un sous-domaine (représentation intérieure) se réduit nécessairement soit à un automorphisme, soit à une transformation de déterminant identiquement nul est fourni par le domaine

$$|xy(x+y-1)| < c, \quad c > \frac{1}{27}.$$

Un tel domaine n'admet aucune représentation intérieure non dégénérée. L'auteur donne également l'exemple d'une classe de domaines non bornés et simplement connexes qui n'admettent d'autre représentation intérieure régulière et univalente que l'identité. *P. Lelong* (Grenoble).

Gewöhnliche Differentialgleichungen:

● **Kamke, E.: Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. Bd. 1. Gewöhnliche Differentialgleichungen. 2. Aufl. (Math. u. ihre Anwendungen in Monogr. u. Lehrbüchern. Hrsg. v. E. Kamke. Begr. v. E. Hilb. Bd. 18.)** Leipzig: Akad. Verlagsges. Becker & Erler Kom.-Ges. 1943. XXVI, 642 S. u. 60 Fig. RM. 35.50.

Daß das wohldurchdachte Handbuch des Verf. jedem, der mit Differentialgleichungen zu tun hat, zum unentbehrlichen Hilfsmittel geworden ist und wegen seines umfassenden Charakters und seiner Gründlichkeit bei allen Fragen ein zuverlässiger Berater ist, beweist allein die Tatsache, daß die umfangreiche erste Auflage (Besprechung in dies. Zbl. **26**, 318) bereits in einem halben Jahr vergriffen war. Die Änderungen in der neuen Auflage beschränken sich im wesentlichen auf die Berichtigung einiger Ungenauigkeiten, vor allem bei den Runge-Kutta-Formeln für Diffgl. 2. O. (S. 149f.). Es sei auch hier auf die laufende Veröffentlichung von Ergänzungen in der Z. angew. Math. Mech. hingewiesen. *Harald Geppert* (Berlin).

Nadolschi, Victor L.: Sur une nouvelle classe d'équations différentielles. *Ann. Sci. Univ. Jassy, I: Math.* **27**, 289—302 (1941).

Die lineare Differentialgleichung

$$f y'' + \left(\frac{f'}{2} + a\sqrt{f} \right) y' + y = 0 \quad \text{mit} \quad f = f(x) > 0$$

geht durch die Substitution

$$y(x) = \eta(\xi), \quad \xi = \int \frac{dx}{\sqrt{f}}$$

über in die sofort lösbare Differentialgleichung $\eta'' + a\eta' + \eta = 0$. Dieses Ergebnis wird elementar und außerdem mit Hilfe der Theorie der Berührungstransformationen

hergeleitet. Die daraus abgeleitete Lösung der Riccatischen Differentialgleichung

$$y' = \alpha y^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta'}{\beta} - \frac{\alpha'}{\alpha} \right) y' + \beta$$

findet sich schon bei Abel; vgl. Kamke, Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, Bd. 1, 2. Aufl. Leipzig 1943, S. 23 (c); (vgl. vorsteh. Referat). *Kamke*.

Stene, Sverre: Convection investigations. 3. Note on the solution of a type of simultaneous differential equations occurring in the theory of convection. Norske Vid. Selsk., Forh. 13, 5—8 (1941).

Il s'agit du système

$$\frac{dy_i}{dx} - kfy_{i-1} + ky_i - k(1-f)y_{i+1} = 0, \quad y_0 = y_{n+1} = 0.$$

L'aut. étudie les racines de l'équation caractéristique du système, puis il indique un procédé pour calculer les constantes d'intégration. Les résultats sont interprétés dans la théorie de la convection. *Ch. Blanc* (Lausanne).

Hölder, Ernst: Einordnung besonderer Eigenwertprobleme in die Eigenwerttheorie kanonischer Differentialgleichungssysteme. Math. Ann. 119, 21—66 (1943).

Zugrunde gelegt wird das Eigenwertproblem

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n (b_{ji} x_j + c_{ij} y_j), \quad \dot{y}_i = - \sum_{j=1}^n (\mu a_{ij} x_j + b_{ij} y_j), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

mit den in Parameterform gegebenen Randbedingungen

$$x_i^0 = \sum_h \gamma_{ih}^0 u_h, \quad x_i^1 = \sum_h \gamma_{ih}^1 u_h, \quad \sum_i (y_i^0 \gamma_{ih}^0 - y_i^1 \gamma_{ih}^1) = 0.$$

Dabei sind die a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} im Intervall $t^0 \leq t \leq t^1$ gegebene stetige Funktionen von t ; $x_i^0 = x_i(t_0)$, entsprechend x_i^1 , y_i^0 , y_i^1 und μ der Eigenwertparameter. Die Matrizen der a_{ij} und der b_{ij} seien symmetrisch und von konstantem Rang $n - p$ mit $0 \leq p \leq n$ auf $t^0 \leq t \leq t^1$ und die quadratischen Formen $\sum_{ij} \xi_i a_{ij} \xi_j$ und $\sum_{ij} \xi_i c_{ij} \xi_j$ seien positiv semidefinit. Die von G. A. Bliss untersuchten Systeme [Trans. Amer. Math. Soc. 28, 561 (1926) und dies. Zbl. 20, 32] werden hierbei mit erfaßt. Verf. gibt mit Hilfe eines Paares adjungierter Integralgleichungen mit unsymmetrischer Kernmatrix die quellenmäßige Darstellung der Koordinaten eines „von der Klasse D' zulässigen Paares“ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (d. h. die x_i seien stückweise stetig differenzierbar, die y_i stückweise stetig), die beiden Minimumeigenschaften des kleinsten positiven Eigenwertes und den Weinsteinschen Einschließungssatz. — Im zweiten Abschnitt werden die Resultate ausgedehnt auf den Fall, daß die symmetrische Matrix a_{ij} nicht mehr positiv semidefinit ist; zugleich darf in den Randbedingungen $\sum_i (y_i^0 \gamma_{ih}^0 - y_i^1 \gamma_{ih}^1 - \mu \beta_{hi} u_i) = 0$ der Eigenwert μ auftreten (oben war $\beta_{hi} = 0$). — Im dritten Abschnitt werden die von E. Kamke untersuchten Eigenwertprobleme bei Differentialgleichungen $2n$ -ter Ordnung (dies. Zbl. 22, 142, 344, 345; 27, 62)

$$\left[\frac{1}{c} x^{(n)} \right]^{(n)} = \sum_{e=1}^n (-1)^e [(a_{n-e} + \mu k_{n-e}) x^{(n-e)}]^{(n-e)}$$

mit $2n$ Randbedingungen in ein System von $2n$ Gleichungen erster Ordnung umgeschrieben und auf diese Weise eine Reihe der von Kamke aufgestellten Ergebnisse mit Hilfe der Methode für Systeme bewiesen, so die Entwicklung willkürlicher zulässiger Funktionen der Klasse D' , die Minimaleigenschaften der positiven Eigenwerte und die Einfangmethode zum Nachweis der Existenz von Eigenwerten. *Collatz*.

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Cloranesu, Nicolas: Sur un problème pour les fonctions harmoniques dans un cercle. Bul. Politehn., București **13**, 26—30 (1942).

Es habe der Kreis C_R den Radius R ; das Innengebiet heiße K_R . Gesucht ist diejenige in K_R reguläre, in $K_R + C_R$ stetige Potentialfunktion $u(\varrho, \vartheta)$, die für ein fest vorgegebenes $r < R$ der Bedingung (1) $u(R, \vartheta) - \lambda u(r, \vartheta) = f(\vartheta)$ ($f(\vartheta)$ bekannt) genügt. Aus (1) findet sich für $\varphi(\vartheta) = u(R, \vartheta)$ die Integralgleichung

$$(2) \quad \varphi(\vartheta) - \frac{\lambda}{2} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\vartheta - \alpha) + r^2} \varphi(\alpha) d\alpha = f(\vartheta);$$

$u(\varrho, \vartheta)$ wird dann durch das Poissonsche Integral geliefert. — Ist insbesondere $f(\vartheta)$

$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta)$, so erhält man für hinreichend kleine $|\lambda|$

$$u(\varrho, \vartheta) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \int_0^{2\pi} \frac{(R^{2n+2} - r^{2n} \varrho^2) f(\alpha) d\alpha}{R^{2n+2} - 2R^{n+1} r^n \varrho \cos(\vartheta - \alpha) + r^{2n} \varrho^2}.$$

Als Eigenwerte von (2) ergeben sich $\lambda_n = \left(\frac{R}{r}\right)^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) mit den Eigenfunktionen $\cos n\vartheta$ und $\sin n\vartheta$. Maruhn (Berlin).

Zagar, Francesco: Il problema della sostituibilità di un potenziale di superficie ad un potenziale di volume. Mem. Soc. astron. Ital., N. s. **15**, 205—210 (1943).

Verf. untersucht die Frage der Überführbarkeit des Flächenpotentials einer Kugel mit einer veränderlichen Dichte (proportional der Variation des Radiusvektors vom Ursprung nach dem Kugelpunkt) in ein Körperpotential eines homogenen Ellipsoids; die Problemstellung stammt aus der Theorie der Doppelsterne und hängt mit der Bestimmung der Periastronbewegung eines Doppelsterns infolge der elliptischen Gestalt beider Komponenten unter der Annahme nichtstarrer Körper zusammen. Es wird unter mühsamer Auswertung von komplizierten Doppelintegralen gezeigt, daß eine derartige Substitution nicht einmal ohne Bedenken zulässig ist, wenn man die Glieder der 2. Potenzen der Exzentrizitäten berücksichtigt, geschweige denn, wenn man Entwicklungen bis zu den 4. Potenzen macht. — Vgl. Verf., Rend. Sem. mat. fis. Milano **16**, 100—142 (1942); Rend. Sem. mat. Padova **13**, 53—74 (1942); T. G. Cowling, dies. Zbl. **19**, 383. Volk (Würzburg).

Wagner, C.: Über einen einfachen Sonderfall zur Berechnung der Temperaturverteilung in Wärmespeichern bei Wärmeaustausch mit strömenden Gasen. Ing.-Arch. **14**, 136—140 (1943).

Ein ebener Wärmespeicher wird von einem Gasstrom durchsetzt, der vom Zeitpunkt $t = 0$ an mit der Übertemperatur ϑ_0 und der Geschwindigkeit w strömt. Im Gase sollen Temperaturdifferenzen senkrecht zur Stromrichtung vernachlässigbar sein und die Wärmeübergangszahl an den Wärmespeicher sei unendlich groß. Die Anfangsbedingungen seien $\vartheta(x, y, t = 0) = 0$, $\vartheta(x = 0, y = 0, t > 0) = \vartheta_0$, wenn $x = y = 0$ die vordere Kante des Wärmespeichers ist. Neben der Wärmeleitgleichung ergibt sich die Randbedingung $\left(\frac{d\vartheta}{dy}\right)_{y=0} = \frac{h \cdot w c_p \cdot \varrho}{2\lambda} \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{y=0}$ (λ = Wärmeleitfähigkeit des Materials des Speichers, h = Breite des Gasstroms, c_p = spez. Wärme des Gases und ϱ = Dichte des Gases) aus der Tatsache, daß die am Eingang dem Gase entzogene Wärme eine entsprechende Abkühlung des Gases bedingt. Ähnlich wie bei dem einfachsten Wärmeleitproblem kann die Diff.-Gl. durch Einführung von

$$\xi = \frac{2\lambda}{h w c_p \varrho} \frac{x}{2\sqrt{at}} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{y}{2\sqrt{at}} \quad (a = \text{Temperaturleitfähigkeit}) \quad \text{zu}$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \eta^2} + 2 \left(\xi \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \right) = 0$$

mit der Randbedingung $\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta}$ für $\eta = 0$ vereinfacht werden, die mit dem Ansatz, daß ϑ nur von $\sigma = \xi + \eta$ abhängt, zu: $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \sigma^2} + 2\sigma \frac{d\vartheta}{d\sigma} = 0$ führt; damit erhält man schließlich: $\vartheta = \vartheta_0 \left\{ 1 - \Phi \left[\left(\frac{2\lambda}{hwc_{p\varrho}} x + y \right) \frac{1}{2\sqrt{at}} \right] \right\}$, wo Φ das Gaußsche Fehlerintegral ist. Das „Eindiffundieren“ der Wärme in den Speicher erfolgt also so, als ob in der Diffusionsrichtung ein Wärmeleitungswiderstand von der Länge $\frac{2\lambda}{hwc_{p\varrho}} x$ vorgeschaltet ist, an dessen Anfang dauernd die Übertemperatur ϑ_0 herrscht.

K. Schäfer (Göttingen).

Lowan, Arnold N.: On the problem of wave-motion for the wedge of an angle. Philos. Mag., VII. s. 31, 373—381 (1941).

Verf. behandelt Wellen in dem keilförmigen Winkelraum, der von den Halbebenen $\theta = 0$ und $\theta = \theta_0$ begrenzt wird. Er bearbeitet die drei Fälle, daß I. auf diesen beiden Ebenen die Verrückung u , II. auf der ersten u , auf der zweiten $\partial u / \partial \theta$, III. auf beiden $\partial u / \partial \theta$ vorgeschrieben ist. Die Ergebnisse lauten in den drei Fällen ähnlich; sie seien hier im ersten Falle wiedergegeben. Von u wird gefordert

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(r, \theta; t) = \Omega(r, \theta; t) \quad \text{mit} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(r, \theta; t) = f(r, \theta), \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} u(r, \theta; t) = g(r, \theta),$$

$$u(r, 0; t) = \varphi_1(r, t), \quad u(r, \theta_0; t) = \varphi_2(r, t).$$

Diese Aufgabe löst Verf. mit der Laplaceschen Abbildung in bezug auf die Zeit. Er drückt das Bild u^* von u durch die Greensche Funktion der abgebildeten Aufgabe aus; dabei benutzt er die Greensche Funktion der Wärmeleitung in einem Keile, dessen begrenzende Ebenen auf 0⁰ gehalten werden. Zur Dingfunktion zurückkehrend, erhält er u in der Form

$$\begin{aligned} & u_1 + u_2 + u_3, \quad \text{wo} \quad u_1(r, \theta; t) \\ &= -\frac{2a}{\theta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi\theta}{\theta_0} \int_0^{\theta_0} \sin \frac{n\pi\theta'}{\theta_0} d\theta' \int_0^{\infty} r' dr' \int_0^{\infty} J_{n\pi/\theta_0}(\alpha r) J_{n\pi/\theta_0}(\alpha r') d\alpha \int_0^t \sin \alpha x(t-\tau) \Omega(r', \theta'; \tau) d\tau \\ &+ \frac{2}{\theta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi\theta}{\theta_0} \int_0^{\theta_0} \sin \frac{n\pi\theta'}{\theta_0} d\theta' \int_0^{\infty} r' f(r', \theta') dr' \int_0^{\infty} \cos \alpha x t J_{n\pi/\theta_0}(\alpha r) J_{n\pi/\theta_0}(\alpha r') \alpha d\alpha \\ &+ \frac{2}{a\theta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi\theta}{\theta_0} \int_0^{\theta_0} \sin \frac{n\pi\theta'}{\theta_0} d\theta' \int_0^{\infty} r' g(r', \theta') dr' \int_0^{\infty} \sin \alpha x t J_{n\pi/\theta_0}(\alpha r) J_{n\pi/\theta_0}(\alpha r') d\alpha, \\ &u_2(r, \theta; t) = \frac{2a\pi}{\theta_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{n\pi\theta}{\theta_0} \int_0^{\infty} \frac{dr'}{r'} \int_0^{\infty} J_{n\pi/\theta_0}(\alpha r) J_{n\pi/\theta_0}(\alpha r') d\alpha \int_0^t \sin \alpha x(t-\tau) \varphi_1(r', \tau) d\tau; \end{aligned}$$

u_3 unterscheidet sich von u_2 dadurch, daß φ_1 durch φ_2 ersetzt und unter \sum_n der Malteil $(-1)^{n+1}$ hinzugefügt ist.

Koschmieder (Graz).

Cinquini-Cibrario, Maria: Sul problema di Goursat per le equazioni del tipo iperbolico non lineari. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 21, 189—229 (1942).

Le problème de Goursat pour une équation aux dérivées partielles du second ordre, de type hyperbolique, non linéaire (I) $F(x, y; z; p, q; r, s, t) = 0$ ($F_z^2 - 4F_r F_t > 0$), c'est-à-dire la recherche d'une surface intégrale $z = z(x, y)$ passant par deux courbes données $y = f_1(x)$, $z = F_1(x)$; $x = f_2(y)$, $z = F_2(y)$ ayant un point commun, est d'abord ramenée à celle d'une intégrale d'une équation de la forme (II) $s = f(x, y; z; p, q; r, t)$,

passant par les axes des x et des y . L'existence et l'unicité de la solution du problème de Goursat résultent alors du théorème suivant: Sous l'hypothèse que la fonction f soit définie au moins pour des valeurs suffisamment voisines de zéro des arguments, qu'elle y admette des dérivées continues des trois premiers ordres et qu'elle vérifie à l'origine $1 - 4(f_{rr})_0(f_{tt})_0 > 0$, il existe une et une seule intégrale $z(x, y)$ de (II), définie au moins pour des valeurs de $|x|$ et $|y|$ suffisamment petites, finie et continue ainsi que ses dérivées des trois premiers ordres et qui s'annule sur les deux segments des axes de coordonnées contenus dans son champ de définition. Suivant l'exemple de H. Lewy dans le problème de Cauchy [Math. Ann. 98, 179—191 (1928)], l'aut. introduit les courbes caractéristiques; puis, ayant fait un choix convenable de fonctions auxiliaires, il applique la méthode des approximations successives. Le cas où l'une des courbes données est une caractéristique, ou même les deux, est étudié; ainsi que le champ de définition de l'intégrale existe en évidence dans le cas général. Lorsque l'équation (I) est quasi-linéaire (c'est-à-dire linéaire par rapport aux dérivées secondes), les hypothèses et les raisonnements se simplifient. *Frédéric Roger* (Freiburg i. B.).

Variationsrechnung:

Lichnerowicz, André: Sur une extension du calcul des variations. C. R. Acad. Sci., Paris 216, 25—28 (1943).

Verf. definiert ein Funktional $F(x^\lambda, \dot{x}^\lambda)$, welches mit einer Kurve $x^\lambda = x^\lambda(\nu)$ verbunden ist. Die Variation δF von F bei einer Variation der Kurve soll einen exzeptionellen Teil enthalten, der vom Verf. die Untervariation von F genannt wird. Auch wird die Untervariation von Integralen der Gestalt $\int \varphi(F) d\nu$ definiert. Für diese Untervariation wird eine Ungleichheit abgeleitet. *J. Haantjes* (Amsterdam).

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

● **Hameister, Ernst:** Laplace-Transformation. Eine Einführung für Physiker, Elektro-, Maschinen- und Bauingenieure. München u. Berlin: R. Oldenbourg 1943. 147 S. u. 17 Abb. RM. 9.—.

Eine für Praktiker bestimmte, weitgehend an die Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation von Doetsch (Berlin 1937; dies. Zbl. 18, 129) sich anschmiegende Darstellung des Begriffs und der einfachsten (Abbildungs-) Eigenschaften dieser Transformation, soweit sie bei der Lösung der Abelschen Integralgleichung, von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Beiwerten sowie der linearen Wärmeleitungs- bzw. reinen Wellengleichung unter den einfachsten Anfangs- und Randbedingungen unumgänglich notwendig und Praktikern verständlich sind. Neben einfachen Beispielen und tabellarischen Zusammenstellungen geben Anhänge kurze Übersichten über Nachbarggebiete und ein Auszug Einblick in H. Fischers Dissertation: Die Laplace-Transformation in der Theorie der Besselfunktionen (Freiburg 1937; dies. Zbl. 17, 396). Auf die wesentlich schwierigeren Fragen der Rücktransformation und der Asymptotik wird nur hingewiesen. *v. Szentmártony* (Budapest).

Parodi, Maurice: Sur la relation de Carson. Rev. Scient., Paris 81, 26—27 (1943).

Einen, allgemein nach Duhamel [J. Éc. Polyt. 14 (1833)] benannten und bereits in Handbüchern bei Ausgleichsproblemen streng behandelten Superpositionssatz schreibt Verf. J. R. Carson (1926) zu und glaubt, ihn für das bei der Freileitung auftretende System durch formale Laplace-Transformation beweisen zu können.

v. Szentmártony (Budapest).

Colombo, Serge: Sur quelques nouvelles correspondances symboliques. Bull. Sci. math., II, s. 67, 104—108 (1943).

Ergebnisse rein formaler Operationen über bekannte — größtenteils formal gewonnene — Korrespondenzen zwischen Funktionen und ihren Laplace-Transformierten. *v. Szentmártony* (Budapest).

Hornich, Hans: Über gewisse trigonometrische Integrale. 1. Math. Z. 48, 785—791 (1943).

Es sei $a_k > 0$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) und

$$\Phi_1(t) = 1 \left(\left| t \right| < \frac{a_1}{2} \right), \quad \frac{1}{2} \left(\left| t \right| = \frac{a_1}{2} \right), \quad 0 \left(\left| t \right| > \frac{a_1}{2} \right),$$

$$\Phi_k(t) = \int_{-a_k/2}^{a_k/2} \Phi_{k-1}(t - \xi) d\xi \quad (k = 2, 3, \dots);$$

ferner wird $\Psi_k(t) = \frac{\Phi_k(t)}{a_1 a_2 \dots a_k}$ gesetzt, so daß $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_k(t) dt = 1$ ist. Durch Verwendung des Dirichletschen Diskontinuitätsfaktors gelangt Verf. in bekannter Weise zu der Integraldarstellung

$$\Phi_k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin a_1 x}{x} \right) \left(\frac{\sin a_2 x}{x} \right) \dots \left(\frac{\sin a_k x}{x} \right) \cos(2xt) dx.$$

Vgl. auch G. Pólya, Math. Ann. 74, 204—212 (1913). Verf. entwickelt verschiedene interessante Eigenschaften und Funktionalgleichungen der Funktionen $\Phi_k(t)$ und $\Psi_k(t)$, studiert ihr Verhalten für $k \rightarrow \infty$ und zeigt, daß $\Psi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Psi_k(t)$ für alle t gleichmäßig gilt; hierbei ist $\Psi(t)$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion, welche dann und nur dann nicht identisch verschwindet, wenn $\sum_1^{\infty} a_k^2 < \infty$ ausfällt. Dieser Sachverhalt ist im wesentlichen bekannt. Untersuchungen über konvergente unendliche Faltungen wurden meistens im Rahmen der Fourier-Stieltjesschen Transformationstheorie durchgeführt; vgl. z. B. die Arbeiten von A. Wintner (dies. Zbl. 10, 59; 13, 256) und T. Kawata (dies. Zbl. 24, 118). Es folgen einige Anwendungen (Anzahl der Zerlegungen einer reellen Zahl in beschränkte Summanden, Reduktion eines k -fachen Integrals und iterierte Mittelbildungen von Funktionen). *H. Hadwiger* (Bern).

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Tukey, J. W.: Some notes on the separation of convex sets. Portugaliae Math. 3, 95—102 (1942).

Poursuivant des recherches d'Eidelheit [Studia Math. 6, 104—111 (1936); ce Zbl. 15, 356] et S. Kakutani [Proc. Imp. Acad. Tokyo 13, 93—94 (1937); ce Zbl. 17, 23], l'Au. recherche dans quels cas deux ensembles A et B , convexes et sans point commun, situés dans un espace de Banach E , peuvent être séparés par un hyperplan fermé; il faut et il suffit pour cela que l'ensemble convexe $A-B$ soit tout entier d'un même coté d'un hyperplan fermé passant par l'origine. L'Au. déduit de ce critère que la séparation est possible dans les cas suivants: 1) A ouvert, B arbitraire; 2) A et B fermés, A compact, ou faiblement compact, ou faiblement bicomact. Il donne un exemple dans l'espace de Hilbert, où A et B sont fermés, mais non bornés, et $A-B$ partout dense, ainsi qu'un exemple dans l'espace des fonctions continues sur un intervalle fermé, où A et B sont bornés, B fermé, A , non fermé, $A-B$ dense dans une boule de centre 0. Il prouve que si A est fermé et borné, B fermé, $A-B$ contient toute boule par rapport à laquelle il est dense. Enfin, il pose le problème de savoir si, dans un espace de Banach non réflexif, il existe deux ensembles fermés et bornés A, B , qui ne peuvent être séparés par un hyperplan fermé. Le Réf. a pu former un exemple (non encore publié) de deux tels ensembles dans l'espace (l) des séries absolument convergentes. *J. Dieudonné* (Nancy).

Monna, A. F.: Über schwache und starke Konvergenz in einem P-adischen Banach-Raum. Versl. Nederl. Akad. Wetensch. 52, Nr 5, 207—210 u. dtsch. Zusammenfassung 210 (1943) [Holländisch].

Die Note schließt an eine frühere Arbeit des Verf. an (dies. Zbl. 28, 71). Es wird

gezeigt, daß im Raum $l_p^{(p)}$ der Folgen P -adischer Zahlen $\{x_i\}$ mit $\sum |x_i|_p^p < \infty$, $p \geq 1$, die starke und schwache Konvergenz nicht zusammenfallen. Die Folge der Normen einer schwach konvergenten Folge ist im allgemeinen nicht beschränkt, es gibt andererseits koordinatenweise konvergente Folgen, die nicht schwach konvergent sind.

G. Köthe (Gießen).

Dieudonné, Jean: Sur les homomorphismes d'espaces normés. Bull. Sci. math., II. s. 67, 72—84 (1943).

Diese Arbeit hängt mit einer vor kurzem erschienenen Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 27, 321) zusammen. Es seien E, F zwei lineare normierte Räume und $L(E, F)$ der Raum aller linearen stetigen Abbildungen u von E in F mit der durch die Norm $\|u\|$ bestimmten Topologie. Es handelt sich um das folgende Problem: Wenn gewisse Eigenschaften einer linearen stetigen Abbildung u von E in F bekannt sind, was kann man von solchen linearen stetigen Abbildungen von E in F , welche im Raume $L(E, F)$ zu u hinreichend benachbart sind, aussagen? Die Hauptresultate der zwei ersten Abschnitte sind die folgenden drei Sätze, die Verf. mittels der von der Dualitätstheorie (vgl. die genannte Arbeit) hergenommenen Überlegungen bewiesen hat: (I) Es seien E, F vollständig und u ein Homomorphismus (siehe a. a. O., S. 112) von E auf F . Wenn die Norm einer linearen stetigen Abbildung w von E in F hinreichend klein ist, so ist $v = u + w$ ebenfalls ein Homomorphismus von E auf F . (Ein Gegenbeispiel zeigt, daß dieser Satz nicht mehr gilt, wenn E und F nicht vollständig sind.) (II) u sei ein solcher Homomorphismus von E in F , daß die Menge $u^{-1}(0)$ von endlicher Dimension p ist. Es sei w eine lineare stetige Abbildung von E in F . Wenn die Norm von w hinreichend klein ist, so ist $v = u + w$ wieder ein Homomorphismus von E in F und zwar ist $v^{-1}(0)$ höchstens von p Dimensionen. (Hier sind E, F beliebige lineare normierte Räume, die nicht vollständig zu sein brauchen.) (III) Es seien E, F vollständig, u ein solcher Homomorphismus von E in F , daß der Quotientenraum $F/u(E)$ von endlicher Dimension p ist. Wenn die Norm einer linearen stetigen Abbildung w von E in F hinreichend klein ist, so ist $v = u + w$ wieder ein Homomorphismus von E in F und zwar ist $F/v(E)$ höchstens von p Dimensionen. — Um die zu einem Homomorphismus u benachbarten stetigen (i. a. nichtlinearen) Abbildungen zu untersuchen, verwendet Verf. im dritten Abschnitt eine verallgemeinerte Methode der sukzessiven Approximationen.

Ky Fan (Paris).

Julia, Gaston: La théorie des fonctions et la théorie des opérateurs de l'espace hilbertien. J. Math. pures appl., IX. s. 22, 71—83 (1943).

Le même travail a été publié auparavant en langue allemande dans les Abh. Preuß. Akad. d. Wiss. (ce Zbl. 28, 72).

Béla de Sz. Nagy (Szeged).

Julia, Gaston: Sur la convergence faible. C. R. Acad. Sci., Paris 216, 97—100 (1943).

L'auteur remarque qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite f_n d'éléments de l'espace H de Hilbert soit faiblement convergente est que l'expression $\|f_n - g\|^2 - \|f_n - h\|^2$ converge pour tout couple g, h d'éléments de H . La suite f_n , faiblement convergente, étant bornée en module, $d(g) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n - g\|$ et

$D(g) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|f_n - g\|$ sont finis pour tout élément g de H . Si f^* est la limite faible de f_n , on a $d^2(g) = d^2(f^*) + \|g - f^*\|^2$ et $D^2(g) = D^2(f^*) + \|g - f^*\|^2$, ce qui montre que $d(g)$ et $D(g)$ atteignent leur minimum en f^* et en f^* seulement. L'auteur propose la classification suivante des suites f_n faiblement convergentes: 1) $d(f^*) = D(f^*) = 0$ (convergence forte), 2) $0 < d(f^*) = D(f^*)$ (aucune suite partielle fortement convergente, mais $\|f_n - h\|$ convergent pour tout h), 3) $0 = d(f^*) < D(f^*)$ (pas de convergence forte, mais existence d'une suite partielle fortement convergente), 4) $0 < d(f^*) < D(f^*)$ (convergence la plus faible: aucune suite partielle fortement convergente, pas même $\|f_n - f^*\|$ convergent).

Béla de Sz. Nagy (Szeged).

Gomes, Ruy Luís: Sur une généralisation de l'opérateur de projection $E(I)$. *Portugaliae Physica* **1**, 29—34 (1943).

Soit E_λ ($-\infty < \lambda < \infty$) une famille spectrale des projections dans l'espace H de Hilbert (séparable), c'est-à-dire soit 1) $E_\lambda \leq E_\mu$ pour $\lambda < \mu$, 2) $E_{\lambda+0} = E_\lambda$, 3) $E_\lambda \rightarrow 0$ pour $\lambda \rightarrow -\infty$ et $E_\lambda \rightarrow I$ pour $\lambda \rightarrow \infty$. δ étant un intervalle fermé, $\delta = [\lambda, \mu]$, posons $E(\delta) = E_\mu - E_\lambda$; $E(\delta)$ est une fonction additive d'intervalle. Partant de $E(\delta)$, on peut définir une «mesure-projection extérieure» $E^*(M)$ pour des ensembles M quelconques de l'axe des λ (voir E. R. Lorch, ce Zbl. **12**, 22; **20**, 307; H. Nakano, ce Zbl. **21**, 234; **23**, 135). L'aut. obtient cette extension en se servant de la mesure extérieure numérique $U_f^*(M)$ dépendant de l'élément f de H et engendrée par la fonction additive d'intervalle $U_f(\delta) = \|E(\delta)f\|^2$.

Béla de Sz. Nagy (Szeged).

Wavre, R.: L'itération directe des opérateurs hermitiens. *Comment. math. helv.* **16**, 65—72 (1943).

L'A. continue ses recherches commencées dans un Mémoire précédent (*Comment. math. helv.* **15**, 299—317, ce Zbl. **28**, 165). Il montre que les fonctionnelles $l(x)$ et $\bar{\omega}(x)$ attachées à un opérateur hermitien borné A (pour les définitions voir le réf. cité) sont semi-continues, la première inférieurement et la seconde supérieurement. La fréquence $l(x)$ et le caractère 1 ou 0, suivant que $\bar{\omega}(x) \neq 0$ ou $\bar{\omega}(x) = 0$, définissent le rang de l'élément x . Le rang de l'élément x est dit plus élevé que celui de l'élément y si $l(x) > l(y)$ ou si $l(x) = l(y)$, mais $\bar{\omega}(x) > 0$ et $\bar{\omega}(y) = 0$. Le rang d'un élément ne dépasse pas la plus grande limite des rangs des éléments voisins. Après avoir fait certaines remarques sur les relations entre les rangs d'un élément et des termes de son développement dans un système orthogonal, la Note termine avec la proposition suivante: Soit A un opérateur hermitien borné, v_i et x^i ses valeurs et éléments propres. Si A' est l'opérateur formé avec le spectre ponctuel de A , c'est-à-dire tel que

$$A'x = \sum_i v_i(x, x^i) \cdot x^i,$$

alors la fonctionnelle $\bar{\omega}(x)$ attachée à l'opérateur $A - A'$ s'annule identiquement.

Béla de Sz. Nagy (Szeged).

Praktische Analysis:

● **Willers, Friedrich Adolf:** *Mathematische Instrumente*. München u. Berlin: R. Oldenbourg 1943. 270 S. u. 199 Abb. geb. RM. 14.—

Erweiterte Zusammenfassung der ATM-Aufsätze J 081—1 bis 11, J 113—1 bis 10, V 1131—1, V 1132—1 und 2, V 3620—5 bis 7 (s. dies. Zbl. **27**, 231, 324, 325, 410; **28**, 16). Die Ergänzungen beziehen sich im wesentlichen auf geschichtliche Anmerkungen, zahlreiche Anwendungsbeispiele sowie Genauigkeitsbetrachtungen und Fehlerabschätzungen. — Der Rechenschieber (Abschn. I) wird wegen der vielfachen anderweitigen erschöpfenden Darstellungen so gut wie übergangen. Rechenmaschinen (Abschn. II) sowie Koordinatographen, Kurvimeter und Differentiatoren (Abschn. III) werden in etwa gleicher Ausführlichkeit behandelt wie in dem zwei Jahre früher erschienenen gleichnamigen Werk von W. Meyer zur Capellen (s. dies. Zbl. **26**, 133). Es folgt dann eine in dieser Ausführlichkeit und Systematik wohl erstmalige Darstellung von Planimetern (Abschn. IV) sowie harmonischen Analysatoren und Stieltjes-Planimetern (Abschn. V). Die Besprechung letzterer mit den Analysatoren zusammen (und nicht mit den Planimetern) ist eine der vielen didaktischen Geschicklichkeiten des Buches, welches die verschiedenen Geräte nicht nach ihrem Verwendungszweck aufzählt, sondern ihrer Arbeitsweise nach, sodaß Verf. in diesem Lehrbuch gleichzeitig eine Art Physiologie der Rechenmechanismen bietet. Der letzte (V.) Abschnitt behandelt Integratoren und Integratoren. Dabei werden auch die modernsten Maschinen zur Integration von D'gln. besprochen, soweit sie rein mechanisch arbeiten, wie sich das Buch überhaupt auf die Darstellung von Mechanismen beschränkt und z. B. optische Integratoren nicht beschreibt. — Das ausführliche Schrifttum-Verzeichnis umfaßt etwa 500 Nachweise.

v. Guérard (Darmstadt).

Ciurileanu, D. I.: Sur un nouvel appareil pour la mesure des surfaces „Le Parcell-mètre“. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. **25**, 327—332 (1943).

Das vorgeschlagene Gerät ist ein Instrument zur Flächenbestimmung unregelmäßiger Vielecke. Das „Parzellmeter“ arbeitet nach dem Prinzip der graphischen Verwandlung von Vielecken in Dreiecke. Nach Wahl einer Seite des Polygons als Basisrichtung des zu bestimmenden Dreiecks wird auf einer anliegenden Seite des Polygons ein Hilfspunkt M angenommen, dessen Abstand von der Basis die Höhe des aus dem Polygon hervorgehenden Dreiecks darstellen soll. Die Basislänge des Dreiecks wird unmittelbar am Gerät abgelesen und stellt somit ein Maß für die Fläche des Polygons dar. Der Maßstab der Ableseskala hat sich nach dem Maßstab des Planes und nach dem Höhenabstand des Punktes M zu richten. *Sutor (Berlin).*

Kneschke, A.: Über die genäherte Quadratur. Mh. Math. Phys. **51**, 15—23 (1943).

Es werden Näherungswerte für ein bestimmtes Integral $\int_a^b f(x) dx$ betrachtet, die nicht nur, wie sonst meistens, die Werte der Funktion $f(x)$, sondern auch die ihrer Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung m an den Stellen $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ linear-

homogen enthalten. Für das Restglied empfiehlt sich der Ansatz $\sum_{r=1}^n \int_{x_{r-1}}^{x_r} f^{(m+1)}(\xi) N_r(\xi) d\xi$,

wo die N Polynome bedeuten. Es werden einige Sonderfälle behandelt, die teils als Erweiterung der Trapezformel und der Simpsonschen Formel gelten können, teils auf die Maclaurinsche Entwicklung führen. Auch mit der Euler-Maclaurinschen Summenformel und einer ähnlichen von Boole wird der Zusammenhang hergestellt.

L. Schrutka (Wien).

Odgaard, Helge: Das Restglied in einigen Quadraturformeln. Festschr. Prof. J. F. Steffensen 129—132 (1943) [Dänisch].

Wird bei numerischer Integration das Intervall äquidistant geteilt und benutzt man die Endordinaten der Teilintervalle (Cotessche Formeln), so kann das Restglied bekanntlich auf die Form $cf^{(n)}(\xi)$ gebracht werden, wo $f^{(n)}$ die n -te Ableitung des Integranden ist, c eine Konstante und ξ ein Punkt des Intervalles. Dasselbe gilt nach Walther, wenn man die Mittelordinaten der Teilintervalle nimmt (Maclaurinsche Formeln), falls deren Anzahl ungerade ist. Odgaard erweitert dieses Resultat auf eine gerade Anzahl von Ordinaten und auf den Fall, daß man die Mittelordinate des ganzen Intervalls mitnimmt. Numerische Angaben. *Nyström (Helsinki).*

Lemaitre, G.: Intégration d'une équation différentielle par itération rationnelle. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **28**, 815—825 (1942).

Das Verfahren der schrittweisen Näherungen zur Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = a$, bei dem man eine Näherungsfolge von Funktionen $y_n(x)$ nach

$$(1) \quad y_{n+1} = f(x, y_n), \quad y_{n+1}(x_0) = a$$

bestimmt, wird insoweit abgeändert, daß jede dritte Funktion $y_n, y_{n+3}, y_{n+6}, \dots$ nicht nach der Vorschrift (1), sondern nach der „itération rationnelle“

$$(2) \quad y_{n+3} = \frac{y_n y_{n+2} - y_{n+1}^2}{y_n - 2y_{n+1} + y_{n+2}}$$

berechnet wird. Als ausführliches Zahlenbeispiel wird diejenige Lösung von $y' = 2y^2(y - x)$, für welche y gegen x strebt für $x \rightarrow \infty$, berechnet und in einer Tafel für $x = 0; 0,1; 0,2; \dots 3$ auf 6 Dezimalen angegeben. *Collatz (Karlsruhe).*

Grammel, R.: Über die Lösung technischer Eigenwertprobleme. Forschungsh. Geb. Stahlbaues H. **6**, 36—42 (1943).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **20**, 225) hat Verf. ein dem Ritzschen Verfahren ähnliches Verfahren zur angenäherten Lösung technischer Eigenwertprobleme, besonders auch im Hinblick auf eine bequeme graphische Durchführung entwickelt; es werden

als Näherungswerte λ^* für die Eigenwerte λ des Problems

$$I[y, \lambda] \equiv y(x) - \lambda \int_a^b G(x, \xi) \varrho(\xi) y(\xi) d\xi = 0$$

die Nullstellen der algebraischen Gleichung $\text{Det } |a_{ik}| = 0$ mit

$$a_{ik} = \int_a^b I[y_i, \lambda^*] \cdot \varrho y_k dx$$

verwendet. Dabei sind $G(x, \xi)$ die positiv definite Greensche Funktion (die jedoch bei vorgelegtem Problem, etwa aus der Elastomechanik, nicht explizite bekannt zu sein braucht), ϱ eine gegebene positive Belegungsfunktion, $y_i(x)$ frei wählbare, voneinander linear unabhängige, gewisse Randbedingungen erfüllende Funktionen von x . — Die Methode wird in der vorliegenden Arbeit auf „mehrläufige Systeme“ übertragen. Dabei wird in der Ausdrucksweise der Elastomechanik ein System p -läufig genannt, wenn der allgemeine Verformungszustand durch p Funktionen von einer unabhängigen Veränderlichen $s_1(x), s_2(x), \dots, s_p(x)$ beschrieben werden kann. Als solche Funktionen kommen Dehnungen, Schiebungen, Torsions- oder Biegewinkel usw. in Betracht. So sind z. B. auf Zug, Torsion oder Biegung beanspruchte Stäbe einläufige, Scheiben bei drehsymmetrischer Radialdehnung und zyklisch symmetrischer Biegung zweiläufige Systeme und eine Scheibe bei drehsymmetrischer Biegung mit Berücksichtigung der Querkraft ein dreiläufiges System. Als Beispiele werden die tiefsten Eigenfrequenzen der Torsionsschwingungen einer drehsymmetrischen Scheibe und der drehsymmetrischen Radialschwingungen einer Vollscheibe (beide Scheiben veränderlichen Profils) berechnet.

Collatz (Karlsruhe).

Grützmacher, Martin: Eine neue Darstellungsform der harmonischen Analyse und ein neuer mechanischer Kurvenanalysator. Akust. Z. 8, 49—63 (1943) u. Berlin: Habilitationsschrift 1943.

Die gebräuchlichen numerischen Verfahren zur harmonischen Analyse summieren für jeden Teilton getrennt die mit Kosinus und Sinus gebildeten Produkte auf. Die harmonischen Analysatoren folgen i. a. dem gleichen Prinzip. Verf. schlägt statt dieser Voraddition Zusammenfassung der Kosinus- und Sinus-Produkte direkt für jede einzelne Teilstelle der Periode vor. Es gelingt so eine sehr einfache zeichnerische Bestimmung der Teiltöne jeder Ordnung und Konstruktion eines Analysators, welcher wie folgt arbeitet: 1. Gerät beschreibt auf Unterlage Kurve derart, daß Krümmung \times Funktionswert konstant ist. 2. Bei konstantem Vorschub der Funktionskurve ist für jede Ordnungszahl die Winkelgeschwindigkeit konstant. 3. Winkelgeschwindigkeit proportional der Ordnung des jeweils herausgegriffenen Tones. — Verf. bringt zahlreiche Beispiele für das zeichnerische Verfahren sowie eine Abschätzung des Fehlers für Obertöne und Vergleich mit entsprechenden Fehlerabschätzungen von Weyl und Dällenbach. — Die Schreibweise der beiden ersten Gl.n von (5) und der Gl. (6) ist so abzuändern, daß auch die linken Seiten vektoriell werden.

v. Guérard.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Göring, Emil: Eine Erweiterung der Misesschen Kollektive und der entsprechende Ausbau der Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Luzern, Sitzg. v. 24.—29. VI. 1940.) Ber. 12. internat. Kongr. Versich.-Math. 1940 1, 329—343 (1941).

Bei der Versicherung anomaler Risiken sind die Voraussetzungen nicht erfüllt, welche für die Verwendung des Kollektivbegriffes im Sinne R. v. Mises notwendig sind. Verf. schreitet deshalb zu einer Erweiterung. Er betrachtet eine unbegrenzte Zahl von Fällen, in denen die Wahrscheinlichkeit des Eintretens je eines Ereignisses P_i

zur Erörterung steht, falls ein entsprechendes Grundereignis O_s eingetroffen ist. Diese Wahrscheinlichkeiten seien

$$p_s = w(O_s, O_s P_s). \quad s = 1, 2, \dots, k, \dots$$

Das gemeinsame Grundereignis all dieser Fälle, welches man für jeden einzelnen Fall s als eingetroffen betrachtet, sei O , wo also

$$O = O_1, \quad O_2, \quad O_3, \dots, \quad O_s, \dots, O_k, \dots$$

ist. Es sei auch $p_s = w(O, OP)$. — Nun greife man eine beliebige Zahl n aus den k Fällen heraus, ohne sich bei der Auswahl davon beeinflussen zu lassen, ob die betreffenden Ereignisse P_s eingetroffen sind oder nicht. Die herausgegriffenen, zur Erörterung stehenden Ereignisse seien Q_r mit den Wahrscheinlichkeiten

$$v_r = w(O, OQ_r). \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

Es ist $v_r = p_s$, wenn das Ereignis Q_r mit dem Ereignis P_s zusammenfällt. Ist $p_s \equiv p$ ($s = 1, 2, \dots, k, \dots$), so kommt man auf das Misessche Kollektiv zurück. Verf. entwickelt für den von ihm aufgestellten verallgemeinerten Kollektivbegriff eine Reihe von Sätzen.

v. Schelling (Berlin).

Statistik:

● Gebelein, H.: Zahl und Wirklichkeit. Grundzüge einer mathematischen Statistik.

Mit einem Geleitwort v. E. Wagemann. Leipzig: Quelle & Meyer 1943. XII, 425 S. u. 52 Abb. geb. RM. 11.—.

Das vorliegende Werk schlägt völlig neue Wege ein. In höchst origineller Weise wird die mathematische Statistik auf einer neuen Grundlage aufgebaut. In Anlehnung an E. Wagemann werden drei statistische Schlüsse unterschieden: der Inklusions-schluß von der Gesamtheit auf einen Teil derselben, der Repräsentationsschluß von einem Teil auf die Gesamtheit und der Transponierungsschluß von einem Teil auf einen anderen Teil derselben Gesamtheit. Grundsätzlich verwendet Verf. nur reine Kombinatorik unter Vermeidung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, indem er stets von endlichen Gesamtheiten, die dem Urnenschema „ohne Zurücklegen“ entsprechen, ausgeht. Auf dieser Grundlage wird die homograde und die heterograde Theorie (u. a. χ^2 -Methode, Lexissche Dispersionstheorie), aufgebaut, mit der es Verf. dann auch gelingt, den Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitstheorie als Spezialfall zu gewinnen und Gleichverteilungsprinzip, Intuitionismus und Empirismus der Wahrscheinlichkeitslehre sowie allgemein den Induktionsschluß seinem Prinzip einzuordnen. Durch einfache Grenzprozesse werden die binomische und die Bayessche und hieraus die bekannten Grenzverteilungen, die (allerdings schon vor Gauß, nämlich bei de Moivre 1738, aufgetretene) Normalverteilung, die Poissonsche Verteilung usw. hergeleitet. Auch die Korrelationstheorie wird mit dem System der drei statistischen Schlüsse in Zusammenhang gebracht, indem einerseits der Transponierungsschluß auf eine empirische zweidimensionale Verteilung angewandt, andererseits die Korrelation zwischen den Größen der Ausgangsgesamtheit und denen der hiernach mittels eines der drei Schlüsse erschlossenen Gesamtheit untersucht wird. Bedenklich erscheint es jedoch, daß Repräsentations- und Transponierungsschluß auf der mit dem Motiv des mangelnden Grundes begründeten, der Bayesschen Gleichverteilungshypothese entsprechenden Voraussetzung beruhen und somit diese recht anfechtbare Hypothese sich in alle hier behandelten Kapitel einschleicht. Das Kapitel über Korrelationstheorie wird von dem durch den Verf. in eigenen Arbeiten behandelten Variationsproblem, durch geeignete Transformationen der korrelierten Variablen (auf gerade Regressionslinien) die Maximalkorrelation zu bestimmen, beherrscht, durch welches Korrelationskoeffizient, Korrelationsverhältnisse und Pearsonsches Kontingenzmaß einheitlich als Näherungslösungen erfaßt werden. Formalmathematisch bedient sich Verf. sowohl bei Behandlung der Korrelationstheorie als auch in dem einleitenden Kapitel über beschreibende Statistik und in dem über die Behandlung statistischer Zeitreihen ein-

heitlich des zu der betreffenden Verteilung gehörenden Systems normierter Orthogonalpolynome. Die Darstellung ist einfach und in den Rechnungen so ausführlich, daß auch ein mathematisch ungeschulter Leser jede Einzelheit verfolgen kann. Vielleicht hätte bei den immer wiederkehrenden Umformungen von Binomialkoeffizienten durch Weglassen mancher unnötigen Wiederholung und allzu ausführlicher Zwischenrechnung Platz gespart werden können, der andererseits den für manchen Nichtmathematiker oder Nichtphysiker vielleicht etwas zu knapp formelmäßig gehaltenen Abschnitten hätte zugute kommen können, in welchen das Variationsproblem der Korrelation mittels Orthogonalpolynomen gelöst wird. Das Verständnis wird erleichtert durch deutliches Herausheben der Hauptergebnisse in zusammenfassenden Sätzen und eingerahmten Formeln, sowie durch zahlreiche, den einzelnen Abschnitten beigegebene, z. T. aus der Literatur entnommene Zahlenbeispiele aller möglichen Fachgebiete, die ausführlich durchgerechnet werden. Im Anhang sind Netzkurven zur Ablesung der bei den drei Schlüssen auftretenden „Streuungsfaktoren“ und zur Verwendung des χ^2 -Verfahrens beigegeben, ferner Tabellen der Funktions- und Summenwerte der Normalverteilung sowie der Lorenzschen Polynome. — Demnach lohnt es sich sowohl für den Anfänger in statistischen Fragen als für den Kenner der mathematischen Statistik ohne Zweifel, das äußerst anregende und zur Besinnung mahnende Buch gründlich durchzuarbeiten. Dagegen eignet sich das Werk nicht zum Nachschlagen oder zur Orientierung über das Gebiet der mathematischen Statistik und ihren heutigen Stand, da es einerseits die behandelten Fragen von einem zwar gewiß interessanten und für viele Anwendungen — so z. B. vielfach in der Biologie — bisher zu sehr vernachlässigten, aber doch kaum der Fülle der Probleme und Methoden in jeder Hinsicht genügenden Standpunkt beleuchtet und es andererseits diesem speziellen Gesichtspunkt zuliebe nur einen sehr beschränkten Teil des vorhandenen Stoffgebietes behandelt. Weite wichtige Bezirke der mathematischen Statistik (z. B. Schätzung statistischer Parameter aus beobachteten Verteilungen von Meßwerten, Streuungszersetzung, Mehrfachkorrelation) finden keine Berücksichtigung; diese Einseitigkeit wird durch die den einzelnen Kapiteln in Kleindruck angefügten ergänzenden Bemerkungen und Hinweise nicht behoben.

Inhalt: A. Beschreibung statistischer Massen und Verteilungen: I. Statistische Aussagen; II. Statistische Verteilungen und elementare statistische Maßzahlen; III. Die Gaußsche Normalverteilung; IV. Höhere Momente und allgemeine Erwartungswerte einer statistischen Verteilung; V. Das System der zu einer Verteilung gehörigen Orthogonalpolynome; VI. Fehlermöglichkeiten bei der Bearbeitung statistischer Massen. B. Behandlung statistischer Zeitreihen: I. Kennzeichnende Formen statistischer Zeitkurven; II. Verfahren des beweglichen Durchschnitts; III. Verfahren zur Herausarbeitung eines periodischen Bestandteiles; IV. Die Berechnung des Trends; V. Interpolation und Extrapolation; VI. Vergleich zweier statistischer Zeitreihen; Korrelation; VII. Urteile und Fehlurteile bei der Arbeit mit statistischen Zeitreihen. C. Statistische Schlüsse bei einfach gegliederten Massen (Homograde Theorie): I. Fragestellung und Erklärung der drei statistischen Schlüsse; II. Mathematische Hilfsmittel; III. Die kombinatorischen Häufigkeitsverteilungen für die drei statistischen Schlüsse; IV. Gesetze für sehr große statistische Massen. D. Statistische Schlüsse bei mehrfach gegliederten statistischen Massen (Heterograde Theorie): I. Die kombinatorischen Häufigkeitsverteilungen bei k -facher Klassenaufteilung der statistischen Massen; II. Häufigkeitsverteilungen für sehr große statistische Massen; III. Anwendung der Transponierung auf eine statistische Aufnahme; IV. Prüfung zweier statistischer Aufnahmen auf ihre Vereinbarkeit (u. a. χ^2 -Verfahren); V. Untersuchung der inneren Struktur einer statistischen Masse (Lexische Dispersionstheorie); VI. Grenzfälle statistischer Schlüsse. E. Statistische Massen und Verteilungen mit zwei Merkmalsreihen (Korrelationstheorie): I. Elementare Beschreibung einer statistischen Verteilung mit zwei Veränderlichen; II. Der Normalfall gerader Beziehungslinien (lineare Regression); III. Das Variationsproblem der Korrelation; IV. Beispiele zur Korrelationstheorie. *M. P. Geppert* (Bad Nauheim).

Hald, A., und G. Rasch: Einige Anwendungen der Transformationsmethode in der Theorie der Normalverteilung. Festschr. Prof. J. F. Steffensen 52—65 (1943) [Dänisch].

Im engen Anschluß an die vorzügliche Darstellung in dem Buche von N. Arley und K. R. Buch „Wahrscheinlichkeitsrechnung“, Kopenhagen 1940 (dies. Zbl. 23,

337) leiten die Verf. zunächst die Verteilung des arithmetischen Mittels und der Streuung in Stichproben aus einem normalen Kollektiv her. Durch Verallgemeinerung auf Stichproben aus mehrfach normalen Kollektiven erhalten sie in Matrizenform die Verteilung von bestimmten Ausdrücken, welche die Gesamtheit der Koeffizienten der linearen Regressionsgleichungen bei einem Problem mit beliebig vielen Veränderlichen zusammenfassen. Darunter befindet sich auch die schon von H. Hotelling vorgeschlagene und näher untersuchte Verallgemeinerung des Parameters t von „Student“.

v. Schelling (Berlin).

Kobbernagel, P.: Über einen allgemein vorkommenden Mangel bei statistischem Material. Festschr. Prof. J. F. Steffensen 82—84 (1943) [Dänisch].

Es sei d/n eine relative Häufigkeit, die als Schätzung einer gewissen Wahrscheinlichkeit aufgefaßt werden kann; es wird vorausgesetzt, daß n eine zufällige Variable mit einer gewissen Verteilung ist. Es wird dann die Frage behandelt, wie der mittlere Fehler der genannten Schätzung zu bestimmen sei.

W. Simonsen.

Nørlund, N. E.: Bestimmung der Gewichte der Unbekannten bei Elementargleichung. Festschr. Prof. J. F. Steffensen 126—128 (1943) [Dänisch].

Es wird gezeigt, wie die in den Normalgleichungen auftretenden Unbekannten und ihre Gewichte mittels einer bestimmten Differenzgleichung eindeutig bestimmt werden, wenn das Beobachtungsmaterial aus einer gewissen Zahl von Gruppen besteht, von denen jede gleich viele Beobachtungen gleicher Genauigkeit enthält.

W. Simonsen (Kopenhagen).

Biomathematik. Versicherungsmathematik:

Ludwig, Wilhelm: Über die Rolle des Mutationsdrucks bei der Evolution. Biol. Zbl. 62, 374—379 (1942).

Verf. untersucht das Verhältnis der Auswirkung des Selektions- und des Mutationsdruckes in einer panmiktischen Bevölkerung. Während der erste dadurch zustande kommt, daß eine einmalige Mutation durch Begünstigung ihrer Träger im Laufe der Generationen (wenn sie rezessiv ist, kann die benötigte Generationszahl recht erheblich werden) das ursprüngliche Gen verdrängt, trägt der Mutationsdruck der Tatsache Rechnung, daß die günstige Mutation beständig erfolgt mit einer Rate, die die der inversen Mutation übersteigt; er ist bis zu einer Mutantenhäufigkeit von etwa 10^{-4} dem Selektionsdruck überlegen und verkürzt, insbesondere bei rezessiven Allelen die lange „Anlaufzeit“, bis deren Träger eine beachtenswerte Quote darstellen. Das Zusammenwirken der beiden Drucke verkürzt also die von der Evolutionstheorie auf Grund der Mutationshypothese benötigten Zeiträume erheblich.

Harald Geppert.

De Finetti, Bruno: Il calcolo delle probabilità nel dominio dell'assicurazione. (Luzern, Sitzg. v. 24.—29. VI. 1940.) Ber. 12. internat. Kongr. Versich.-Math. Luzern 1940 1, 253—259 (1941).

Verf. ist der unbedingten Ansicht, daß die Wahrscheinlichkeitstheorie das einzig geeignete, natürliche Werkzeug zur Behandlung versicherungsmathematischer Fragen sei. Er belegt seine Ansicht unter anderem durch den Hinweis auf nichtlineare Probleme, die Risikotheorie und die Wahrscheinlichkeitsansteckung.

Saxer (Zürich).

Lublin, Mogens: Das Gesetz der Gleichaltrigkeit und die Formel von Makeham. Festschr. Prof. J. F. Steffensen 100—108 (1943) [Dänisch].

Verf. erledigt die folgende allgemeine Frage: Unter welchen Bedingungen lassen sich zwei Individuen (x) und (y), deren Sterblichkeit durch die zwei Absterbeordnungen F und G bestimmt sei, in dem Sinne durch ein fiktives Individuum (ω), dessen Sterblichkeit mittels der Absterbeordnung H charakterisiert ist, ersetzen, daß ω nur von x und y abhängt: $\omega = \varphi(x, y)$, und daß für jedes t

$$\frac{F(x+t)}{F(x)} \cdot \frac{G(y+t)}{G(y)} = \frac{H(\omega+t)}{H(\omega)}$$

ist? — Es wird bewiesen, daß die zu den Funktionen F , G und H gehörigen Sterbensintensitäten μ_x^F , μ_y^G und μ_w^H — von gewissen singulären Fällen abgesehen — nur als Makehamsche Ausdrücke: $\mu_x^F = \alpha_1 + \beta_1 c^x$, $\mu_y^G = \alpha_2 + \beta_2 c^y$ und $\mu_w^H = \alpha_3 + \beta_3 c^w$ mit demselben Wert des Parameters c existieren können. — Die Ergebnisse werden auf eine beliebige Zahl von Individuen ausgedehnt. W. Simonsen.

Boschan, Paul: Some considerations concerning probability in actuarial science and the foundation of the extended life table. (*Luzern, Sitzg. v. 24.—29. VI. 1940.*) Ber. 12. internat. Kongr. Versich.-Math. Luzern 1940 1, 159—166 (1941).

Verf. weist darauf hin, daß die verschiedenen Ansichten der Aktuare über das Verhältnis der Wahrscheinlichkeitstheorie zur Versicherungstechnik vielleicht im Sinne von M. Schlick vereinigt werden könnten, der hervorhebe, daß, gleichgültig welche Auffassung vertreten wird, die klassische oder die moderne, immer vom Mittel der offenen Definition Gebrauch gemacht wird. Saxer (Zürich).

Ten Pas, W. G. J.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik in der Versicherungsmathematik. (*Luzern, Sitzg. v. 24.—29. VI. 1940.*) Ber. 12. internat. Kongr. Versich.-Math. Luzern 1940 1, 263—279 (1941).

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung erscheint als eine Form der Sprache, die fast invariant ist gegenüber der Vertauschung von Sprecher und Hörer. Die Frage, ob man die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf alle Erscheinungen anwenden kann, spaltet sich in zwei Unterfragen bezüglich Erscheinungen, die 1) zeitlich einen konstanten Charakter tragen und 2) fortlaufend variierende Eigenschaften besitzen. Auf Erscheinungen der zweiten Gruppe, in welche die Sterblichkeitsercheinungen gehören, kann die Wahrscheinlichkeitsrechnung i. a. nicht angewandt werden. Die klassische Versicherungsmathematik hat die praktische Annahme einer für die Zukunft konstanten Sterbenswahrscheinlichkeit gemacht. In diesem Aufsatz wird die Messung der Sterblichkeit und das Konstruieren von Eigenschaften dieser Sterblichkeit mittels mathematischer Funktionen studiert. Eine vergleichende Statistik über den Rückgang der Sterblichkeit in den Jahren 1921 bis 1934 in den Ländern Niederlande, Norwegen und Schweden ist aufgestellt worden. Zur Darstellung der Abhängigkeit der Sterblichkeit von der Zeit während der Beobachtungsperiode wird eine ganze lineare Funktion gewählt, deren Konstanten mit der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden.

Janko (Prag).

Lah, Ivo: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Versicherungswesen. (*Luzern, Sitzg. v. 24.—29. VI. 1940.*) Ber. 12. internat. Kongr. Versich.-Math. Luzern 1940 1, 409—430 (1941).

Verf. sieht einen wesentlichen Grund für die umstrittene Stellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Versicherungsmathematik darin, daß die klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung keine praktisch gangbare Brücke von kleinen zu großen Anzahlen zu schlagen vermochte. Die Theorie der ansteckenden Wahrscheinlichkeiten (die für Massenerscheinungen in Frage kommt, weil sie meistens nicht unabhängig sind) sei noch kaum in das Versicherungswesen eingedrungen. Dagegen werde die neue statistisch-symptomatische Methode mehr und mehr bevorzugt, die kein allgemeines Prinzip voraussetzt. — Verf. erweitert die allgemeine Form der menschlichen Sterbegesetze (als vollständiges Integral der Differentialgleichung von Quinet mit reellen Wurzeln der zugehörigen charakteristischen Gleichung) dahingehend, daß sie ein allgemeines Sterbegesetz der Lebewesen überhaupt und des Zerfalles in der anorganischen Natur darstellt, z. B. auch des Atomzerfalls. Bei charakteristischer Gleichung mit imaginären oder komplexen Wurzeln ersetzt Verf. die Sterbe- bzw. Zerfallintensität durch andere (volkswirtschaftliche) Intensitäten (Beschäftigung, Zins, Produktion). Das vollständige Integral gibt dann eine allgemeine Form der Wirtschaftsgesetze, z. B. der Konjunkturlehre. Ein von Glasnik bearbeitetes Beispiel (Udruženja aktuars kraljevine Jugošlavije, 1937, S. 38) wird angeführt. — Verf. fordert eine Erweiterung des Begriffes der Wahrscheinlichkeit auf den Fall, daß Chancengleichheit, Konstanz und Unabhängigkeit nicht vorhanden sind. Den Chancen seien nicht nur konstante Gewichte beizulegen. In den meisten Fällen seien die Chancengewichte Funktionen des Ortes oder der Zeit oder auch von Wahrscheinlichkeiten; auf diese Chancengewichte seien anscheinend alle Wahrscheinlichkeitsprobleme zurückzuführen.

Hasso Härlen.